

Théorie des graphes

Licence informatique 2^e année

2024-2025

Table des matières

1 Outils logiques, raisonnement	5
1.1 Logique mathématique	5
1.2 Démonstrations	7
1.3 Techniques de démonstration	14
2 Ensembles et dénombrement	19
2.1 Les ensembles	19
2.2 Les relations	21
2.3 Dénombrement	22
2.3.1 Cardinalité des ensembles	22
2.3.2 Règles de bases du dénombrement	23
2.3.3 Règles avancées du dénombrement	23
3 Graphes : définitions et concepts de base	27
3.1 Définitions	27
3.2 Isomorphisme, sous-graphe et complémentaire	29
3.3 Quelques exemples de familles de graphes	31
4 Chemins, circuits et composantes connexes	35
4.1 Marches et chemins	35
4.2 Cycles et circuits	38
4.3 Connexité	40
4.4 Les arbres	41
5 Parité et cycles Eulériens	45
5.1 Parité des degrés	45
5.2 Graphes de degrés pairs	46
5.3 Chemins Eulériens	47
6 Stables, cliques et colorations	49
6.1 Stables et cliques	49
6.2 Cliques et stables maximum	50
6.3 Coloration	51

Chapitre 1

Outils logiques, raisonnement

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes qui repose sur des bases solides de logique et de techniques de démonstration. L'objectif de ce cours est d'apprendre à écrire des démonstrations mathématiques rigoureuses en s'exerçant sur des résultats de théorie des graphes. Dans cette section, nous abordons les fondements de l'écriture de preuves en mathématiques.

1.1 Logique mathématique

Propositions.

Définition 1.1.1 (Proposition). Une **proposition** est une assertion qui est soit vraie, soit fausse.

Voici un exemple de proposition vraie :

2 est un nombre pair,

puis un exemple de proposition fausse :

5 est divisible par 2.

Il n'est pas nécessaire de savoir si l'assertion est vraie ou fausse pour en faire une proposition, par exemple voici une proposition dont nous ne savons pas si elle est vraie ou fausse :

Il n'existe pas d'algorithme de complexité polynomiale en temps, qui prenant en entrée un graphe arbitraire, décide si ce graphe est 3-coloriable.

Un tel algorithme n'est pas connu, mais personne n'a pu démontrer qu'il n'en existe pas. Voici un autre exemple de proposition dont la véracité n'est pas établie. Prenons un entier n arbitraire, et considérons la proposition :

n est un entier pair.

Ne connaissant pas la valeur de n , nous ne pouvons pas savoir si la proposition est vraie ou fausse, mais elle est bien soit vraie, soit fausse, selon la valeur de n .

Voici quelques exemples de ce qui n'est pas une proposition. Ceci est une définition :

Soit α un réel positif non-nul.

Ce n'est pas une proposition, mais suite à cette définition la proposition " α est un réel positif" est vraie. Considérons l'exemple :

$$3x^2 + 2x - 5$$

qui est une expression (d'un polynôme si x est une inconnue, d'un entier si x est un entier, ...). Cette expression n'est ni vraie ni fausse, ce n'est pas une proposition.

Connecteurs logiques. Les connecteurs logiques permettent de construire de nouvelles propositions à partir de propositions existantes :

- ▷ **Non** ($\neg P$) : La négation de P .
- ▷ **Et** ($P \wedge Q$) : La conjonction de P et Q .
- ▷ **Ou** ($P \vee Q$) : La disjonction de P et Q .
- ▷ **Implication** ($P \implies Q$) : “Si P , alors Q ”.
- ▷ **Équivalence** ($P \iff Q$) : “ P si et seulement si Q ”.

Les tables de vérité permettent de définir formellement les connecteurs logiques. Voici les tables pour les connecteurs fondamentaux :

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$	$P \iff Q$
Vrai	Vrai	Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux	Faux	Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai	Faux	Vrai	Vrai	Faux
Faux	Faux	Vrai	Faux	Faux	Vrai	Vrai

Remarque 1.1.2.

1. L'**implication** ($P \implies Q$) signifie que si P est vrai, alors Q doit être vrai. Elle est équivalente à la formule logique suivante :

$$\neg P \vee Q.$$

Lorsque P est faux, l'implication est vraie indépendamment de la valeur de Q . Cela peut sembler contre-intuitif mais découle de la définition logique formelle. Prenons l'exemple suivant : s'il pleut, je prends mon parapluie. Il s'agit d'une formule logique $P \implies Q$ où P est la proposition “il pleut”, et Q la proposition “je prends mon parapluie”. S'il ne pleut pas, je ne viole pas cette formule en prenant, ou ne prenant pas mon parapluie. Elle est donc toujours vraie lorsqu'il ne pleut pas. S'il pleut, elle ne peut être vraie que si j'ai effectivement pris mon parapluie.

2. L'**équivalence** ($P \iff Q$) signifie que P est vrai si et seulement si (ssi) Q est vrai, c'est à dire si P et Q ont la même valeur de vérité. Il s'agit en fait d'une simplification pour la double implication suivante :

$$(P \implies Q) \wedge (Q \implies P).$$

Très souvent, lorsqu'on souhaite démontrer que “ P ssi Q ”, on procède donc en 2 étapes, en prouvant les 2 implications $P \implies Q$ et $Q \implies P$.

Quantificateurs Les quantificateurs sont utilisés pour exprimer des propriétés générales ou particulières :

- ▷ **Quantificateur universel** (\forall) : “Pour tout”.
- ▷ **Quantificateur existentiel** (\exists) : “Il existe”.

La proposition

$$\forall x \in \mathbb{N}, x + 1 > x$$

se lit “Pour tout entier naturel x , $x + 1$ est supérieur à x ”.

1.2 Démonstrations

Une démonstration (ou preuve) d'un théorème est constituée d'une suite de définitions et de propositions articulées autour de liens logiques. Parmi les propositions utilisées, nous distinguerons

- ▷ les *hypothèses*, qui sont des propositions que nous supposons être vraies, sans les avoir démontrées. Les hypothèses sont typiquement introduites pour démontrer une implication (si ... alors ...) ou dans certaines techniques de preuves.
- ▷ les *affirmations*, qui sont des propositions dont la véracité est déduite des hypothèses et affirmations précédentes.

Les déductions sont effectuées en suivant les *règles d'inférence* de la logique. Certaines techniques introduisent délibérément des hypothèses fausses (raisonnement par l'absurde), ou du moins dont la véracité n'est pas établie (comme dans le raisonnement par récurrence).

Ainsi, la véracité d'une proposition (relativement aux hypothèses) est établie lorsque :

- ▷ cette proposition est une hypothèse du théorème à démontrer ;
- ▷ cette proposition est déjà démontrée dans le cadre d'un théorème précédent ;
- ▷ cette proposition est une conséquence logique des propositions précédentes.

La preuve se termine lorsque l'énoncé du théorème recherché est obtenu comme une des affirmations dont la véracité est établie. Détaillons les éléments pouvant se trouver dans une démonstration.

Conséquence logique Une démonstration est le plus souvent une progression permettant d'établir la véracité de propositions les unes après les autres jusqu'à obtenir la proposition recherchée. Cette succession de propositions se fait par des déductions logiques suivant des règles d'inférence. Il existe plusieurs règles d'inférences, mais toutes ont en commun de partir de prémisses pour obtenir une conclusion.

Une *prémisse* est une proposition (hypothèse ou affirmation) dont la véracité a déjà été établie. Une *conclusion* est une proposition dont la véracité est la conséquence logique de la véracité des prémisses, et constitue donc une nouvelle affirmation. Il existe diverses règles logiques spécifiant quelles conclusions sont déductibles de quelles prémisses, comme par exemple la règle du *modus ponens*. Voici un exemple de déduction logique.

Admettons les deux hypothèses suivantes :

- (1) $n = 2q$;
- (2) $n = 3r$.

Donc, par transitivité de l'égalité, la proposition suivante est aussi vraie :

- (3) $2q = 3r$.

Ici la conclusion (3) est obtenue par déduction logique des prémisses (1) et (2), en utilisant une règle logique appelée transitivité de l'égalité. Le mot "donc" permet d'indiquer que nous utilisons une règle de déduction, qu'il est préférable de préciser sauf dans les cas les plus simples. Souvent, la proposition précédente est l'unique prémisse utilisée pour déduire la conclusion, ce qui permet d'enchaîner les déductions :

- ▷ 5 est un nombre premier ;
- ▷ donc 1 et 5 sont les seuls diviseurs de 5 (par définition des nombres premiers) ;
- ▷ donc 5 n'est pas divisible par 2 (car $2 \notin \{1, 5\}$) ;
- ▷ donc 5 n'est pas un nombre pair (par définition de pair).

Lorsqu'une déduction utilise plusieurs prémisses, il est préférable de rappeler toutes les prémisses utiles avant d'appliquer la réduction. Une façon de faire est de numéroter toutes les propositions, et de donner les numéros des prémisses lors de l'application de la règle de déduction. Reprenant l'exemple précédent, nous aurions pu écrire :

Par transitivité de l'égalité appliquée aux propositions (1) et (2), nous déduisons (3) $2q = 3r$.

Définir une valeur À tout moment d'une preuve, il est autorisé de définir de nouvelles valeurs. L'usage est d'employer le terme "soit" pour introduire un nom pour cette valeur.

Soit n un entier pair supérieur à 1000.

Lorsque nous connaissons la valeur précise, nous pouvons aussi utiliser le verbe "poser".

Posons $\alpha := 2\pi/5$.

Lorsque la valeur est uniquement définie par une propriété, comme l'entier n ci-dessus, il est nécessaire de montrer auparavant qu'il existe bien des valeurs vérifiant cette propriété. Dans l'exemple de la définition de n , il existe des entiers pairs et supérieurs à 1000, comme 1002. Plus généralement, une définition de la forme

Soit x un élément de l'ensemble Z ...

n'est valide que si Z est non-vide. Un exemple de définition non-valide est

Soit p un entier dont le carré est strictement négatif.

En présence d'un ensemble dont il est prouvé qu'il contient au moins k éléments, il est possible de définir k éléments distincts directement :

Soient e_1, e_2, \dots, e_k k éléments distincts de l'ensemble Z .

Le terme "distincts" précise que tous ces éléments sont différents, c'est-à-dire que la proposition suivante est vraie et établie (donc utilisable dans la suite de la preuve) :

pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ avec $i \neq j$, $e_i \neq e_j$.

Tout comme l'emploi du terme distinct établit implicitement cette proposition, toute définition de valeur établit d'autres propositions automatiquement. Par exemple, pour les définitions précédentes, nous avons que ces propositions sont vraies (et utilisables dans la suite de la démonstration) :

- ▷ n est pair ;
- ▷ $n > 1000$;
- ▷ $x \in Z$;
- ▷ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $e_i \in Z$.

Si l'ensemble Z est de cardinal exactement k , nous pouvons écrire :

Soient e_1, e_2, \dots, e_k les éléments de Z .

Il est alors compris que ces éléments sont distincts et que $Z = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$.

Modus ponens La règle du *modus ponens* est une des principales règles d'inférence que nous utilisons, typiquement pour appliquer un théorème général dans un cas particulier. Du point de vue logique, cette règle dit que si les propositions A et $A \implies B$ sont vraies, alors la proposition B est aussi vraie. Voici un cas d'application :

- (1) Soient 3 points $p = (0, 0)$, $q = (4, 0)$, $r = (0, 3)$ (hypothèse) ;
- (2) pqr est un triangle rectangle en p car $\langle pq | pr \rangle = 0$;
- (3) Si ABC est un triangle rectangle en A , alors $\|AB\|^2 + \|BC\|^2 = \|AC\|^2$;
donc par modus ponens appliqué à (2) et (3),
- (4) $\|pq\|^2 + \|pr\|^2 = \|qr\|^2$.

Une règle proche est celle du *modus tollens* : si $A \implies B$ est vraie et B est faux, alors A est faux.

- (1) Si n est un nombre premier, alors pour tout entier a , $a^p \equiv a[p]$ (petit théorème de Fermat) ;
- (2) $2^4 \equiv 0[4]$;
donc par modus tollens appliqué à (1) et (2), en prenant $a = 2$ et $p = 4$,
- (3) 4 n'est pas premier.

Utiliser la définition d'un concept Il est d'usage de définir de nombreux concepts pour capturer certaines propriétés intéressantes, en leur donnant des noms de manière à former des prédicats. Par exemple, le concept de parité, qui nous a permis de définir un entier n pair. La définition est la suivante :

Définition 1.2.1. Un entier est *pair* s'il est divisible par 2.

Cette définition repose sur celle de la divisibilité :

Définition 1.2.2. Un entier n est divisible par un entier d si le reste de la division de n par d est 0 :

il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $n = q \times d$.

Ces définitions, qui en général ne font pas partie de la preuve, permettent de réaliser des déductions. Voici un exemple de déduction.

- (1) n est pair ; donc
- (2) n est divisible par 2 (par définition de pair) ; donc
- (3) il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $n = q \times 2$ (par définition de divisible).

Le raisonnement peut aussi être effectué dans l'autre sens :

- (1) $1000 = 500 \times 2$; donc
- (2) il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $1000 = q \times 2$ (pour $q = 500$) ; donc
- (3) 1000 est divisible par 2 (par définition de divisible) ; donc
- (4) 1000 est pair (par définition de pair).

Prouver une conjonction Pour prouver une proposition de la forme $A \wedge B$, il faut prouver la proposition A et la proposition B .

Soit $n \geq 1$. Montrons que $n^2 \geq n$ et $n^2 \equiv n \pmod{2}$.

- (1) $n \geq 1$ (par hypothèse) ; donc
- (2) $n^2 \geq n$ (par multiplication car n est positif) ;
- (3) Soit $i \in \{0, 1\}$ le reste de la division de n par 2 ; donc
- (4) $n \equiv i[2]$ (par définition de la congruence) ; donc
- (5) $n^2 \equiv n[2]$ (par règle de la multiplication pour les congruences) ;
- (6) $n^2 > n$ et $n^2 \equiv n[2]$ (par conjonction de (2) et (5)).

Prouver une implication Pour prouver une proposition de la forme $A \implies B$, nous pouvons utiliser une *preuve directe*, qui consiste à ajouter l'hypothèse A , déduire de cette hypothèse l'affirmation B . Nous en concluons alors que $A \implies B$.

Soit n un entier. Montrons que si n est pair, alors n^2 est pair.

- (1) Supposons que n est pair (hypothèse) ;
- (2) soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$ (par définition de pair) ; donc
- (3) $n^2 = (2p)^2 = 2 \times 2p^2$ (par arithmétique) ; donc
- (4) n^2 est pair (par définition de pair). Ainsi
- (5) si n est pair, alors n^2 est pair (logique).

Il est important de noter que les affirmations (2), (3) et (4) sont déduites de l'hypothèse introduite en (1). Lorsque nous arrivons à la proposition (5), nous abandonnons implicitement l'hypothèse (1), et donc ses conséquences logiques. Ainsi, nous ne pourrions pas utiliser les affirmations (2) à (4) dans la suite de la preuve. L'introduction d'une hypothèse provoque de fait le commencement d'un contexte de preuve, qui dure tant que l'hypothèse est considérée. Toute affirmation déduite dans ce contexte est conditionnée à l'hypothèse. Ici, nous utilisons le mot "ainsi" pour signaler la fin du contexte, et la proposition (5) résume ce que nous a appris le raisonnement dans ce contexte de preuve. Il n'existe pas de notation bien définie pour marquer la fin d'utilisation d'une hypothèse ; en général un bon usage est de donner comme ici une affirmation de la forme si ... alors, reprenant l'hypothèse comme condition.

Une implication $A \implies B$ peut aussi se prouver *par contraposition*, c'est-à-dire en prouvant la formule équivalente $\neg B \implies \neg A$.

Démontrons que si n^2 est impair, alors n est impair.

- (1) Supposons par contraposition, que n est pair ;
- (2) soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$ (par définition de pair) ; donc
- (3) $n^2 = (2p)^2 = 2 \times 2p^2$ (par arithmétique) ; donc
- (4) n^2 est pair (par définition de pair). Ainsi [(1) à (4)],
- (5) si n^2 est impair, alors n est impair.

Prouver une disjonction Pour prouver une proposition de la forme $A \vee B$, il est possible de simplement prouver A , ou de simplement prouver B . Nous pouvons alors en déduire $A \vee B$ immédiatement. Ceci est une bonne stratégie lorsque par exemple A est toujours vraie.

Montrons que pour tout entier n , n^2 est pair ou $n(n+1)$ est pair.

- (1) Soit n un entier arbitraire ;
- (2) Soit $i \in \{0, 1\}$ le reste de la division de n par 2 ; donc
- (3) $n \equiv i[2]$ (par définition de la congruence) ; donc
- (4) $n+1 \equiv i+1 \equiv 1-i[2]$ (par arithmétique des congruences) ; donc
- (5) $n(n+1) \equiv i(1-i) \equiv 0[2]$ (par multiplication de (3) et (4)) ; donc
- (6) $n(n+1)$ est pair (par définition de pair) ; donc
- (7) $n(n+1)$ est pair ou n^2 est pair (par disjonction).

Cependant cette stratégie échoue lorsque ce n'est pas systématiquement A qui est vraie ou systématiquement B qui est vraie, puisque si A est parfois faux et B est parfois faux, aucun des deux n'est directement démontrable. Ainsi une meilleure stratégie pour démontrer une disjonction est de supposer que l'un est faux, et d'en déduire que l'autre est vrai. Cela revient à utiliser l'équivalence logique $\neg A \implies B \equiv A \vee B$.

Montrons que pour tout entier n , n^2 est pair ou $(n + 1)^2$ est pair.

- (1) Supposons que n^2 n'est pas pair (hypothèse); donc
- (2) $n^2 \equiv 1[2]$;
- (3) $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$ (identité remarquable); donc
- (4) $(n + 1)^2 \equiv n^2 + 2n + 1[2]$ (par arithmétique des congruences); donc
- (5) $(n + 1)^2 \equiv 1 + 0 + 1[2]$ (en utilisant (2), par arithmétique des congruences); donc
- (6) $(n + 1)^2 \equiv 0[2]$ (par arithmétique des congruences); donc
- (7) $(n + 1)^2$ est pair (par définition de pair).

Ainsi, nous venons de démontrer :

- (8) si n^2 n'est pas pair, alors $(n + 1)^2$ est pair ;
- (9) donc n^2 est pair ou $(n + 1)^2$ est pair (logique).

Comme dans le cas d'une preuve d'une implication, nous introduisons une hypothèse en (1), donc les affirmations (2) à (7) ne sont vraies que dans le contexte de cette hypothèse. L'affirmation (8) clos l'hypothèse en résumant ce que nous avons appris.

Les preuves par cas permettent aussi de prouver des disjonctions, certains cas démontrant A et d'autres B , ce qui permet de conclure que $A \vee B$.

Montrons autrement que pour tout entier n , n^2 est pair ou $(n + 1)^2$ est pair.

- (1) n est pair ou n est impair (par définition de impair = non pair) ;
- (2) Premier cas : n est pair. Donc
- (3) soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$; donc
- (4) $n^2 = (2p)^2 = 2 \times 2p^2$ (par arithmétique); donc
- (5) n^2 est pair (par définition de pair).
- (6) Deuxième cas : n est impair. Donc
- (7) soit p tel que $n = 2p + 1$; donc
- (8) $(n + 1)^2 = (2p + 2)^2 = 2(p + 1)(p + 2)$ (par arithmétique); donc
- (9) $(n + 1)^2$ est pair (par définition de pair). Ainsi, puisqu'il n'y a pas d'autres cas par (1),
- (10) n^2 est pair ou $(n + 1)^2$ est pair.

Prouver une quantification universelle Une quantification universelle est une proposition de la forme "pour tout x , A ". Une telle proposition se démontre en définissant x comme ayant une valeur arbitraire, et en déduisant l'affirmation A . Puisque la valeur de x est arbitraire, nous n'avons aucune information sur x , sauf si la quantification précise des propriétés, comme dans la proposition

Pour tout entier pair n , n^2 est pair.

Dans ce cas, la preuve commencera par définir un entier n pair.

Montrons que pour tout entier pair n , n^2 est pair.

- (1) Soit n un entier pair arbitraire; donc
- (2) il existe p tel que $n = 2p$ (par définition de pair); donc
- (3) $n^2 = (2p)^2 = 2 \times 2p^2$ (par arithmétique); donc
- (4) n^2 est pair (par définition de pair). Ainsi, nous avons démontré :
- (5) pour tout entier pair n , n^2 est pair.

Nous retrouvons ici aussi la création d'un contexte lors de la définition d'une nouvelle valeur n , qui se termine après l'affirmation (4). L'affirmation (5) résume ce que nous avons appris dans le contexte des affirmations (1) à (4).

Prouver une quantification existentielle Une quantification existentielle est une proposition de la forme “il existe x tel que A ”. Une telle proposition se démontre en posant un valeur bien choisie pour x , et en déduisant l'affirmation A . Trouver cette valeur pour x peut nécessiter des raisonnements préalables.

Montrons que pour tout entier n , il existe un entier positif r tel que $r^2 \leq n < (r + 1)^2$.

- (1) Soit $R := \{p \in \mathbb{N} : p^2 \leq n\}$.
- (2) $0^2 \leq n$; donc
- (3) $0 \in R$; donc
- (4) R est non-vide.
- (5) Soit $p > n$; donc
- (6) $p^2 > n^2$; donc
- (7) $p \notin R$. Ainsi, par contraposition (contexte (5) à (7))
- (8) si $p \in R$, alors $p \leq n$.
- (9) Soit $r = \max R$ (puisque R est non-vide (4) et borné (8));
- (10) $r^2 \leq n$ (par définition de R);
- (11) $r + 1 \notin R$ (car $r + 1 > r = \max R$); donc
- (12) $(r + 1)^2 > n$ (par définition de R); donc par conjonction de (10) et (12),
- (13) $r^2 \leq n < (r + 1)^2$. Ainsi (contexte (8) à (13)),
- (14) il existe un entier positif r tel que $r^2 \leq n < (r + 1)^2$.

Preuve par cas Une preuve par cas consiste à distinguer plusieurs possibilités pour la valeur d'une certaine expression, ou la valeur de vérité d'une expression. Par exemple, si nous savons que l'ensemble X est de cardinal au plus 2, nous pouvons faire 3 preuves, selon que $|X|$ vaut 0, 1 ou 2. Chaque cas est une preuve indépendante. Si tous les cas aboutissent à démontrer la même proposition, alors nous pourrions en conclure que la proposition est vraie en général. Une alternative est d'obtenir plusieurs conclusions et d'en déduire la disjonction des différentes propositions démontrées.

Lors d'une preuve par cas où chaque cas est une proposition, il est nécessaire de montrer (si ce n'est pas évident) que tous les cas sont bien couverts, autrement dit qu'il n'y a pas d'autres possibilités. Par exemple, en présence de deux entiers n et m , nous pouvons faire une preuve en trois cas :

- cas 1 : n est pair ;
- cas 2 : m est pair ;
- cas 3 : n et m sont impairs.

En effet ces trois cas suffisent : si les deux premiers cas ne sont pas valables pour n et m , alors n et m sont impairs, donc le troisième cas est valable. Il existe donc bien toujours un cas valable.

Combiner proposition d'existence et définition Il est courant de démontrer l'existence d'une valeur particulière, et de vouloir nommer une telle valeur pour la suite de la preuve.

- (1) Soit n un entier pair ; donc
- (2) il existe un entier k tel que $n = 2k$ (par définition de pair).
- (3) Soit k un entier tel que $n = 2k$ (par (2)).

Nous pourrions alors abrégé la proposition de l'existence avec la définition :

- (1) Soit n un entier pair.
- (2) Soit k un entier tel que $n = 2k$ (par définition de pair et (1)).

Utiliser les symétries. Il est courant lors d'une démonstration d'avoir plusieurs variables dont le rôle est symétrique. C'est-à-dire que ses variables possèdent exactement les mêmes propriétés connues. C'est typiquement le cas lorsque nous définissons plusieurs variables appartenant au même ensemble.

Soient x , y et z trois éléments distincts de X .

Ces variables gardent leur symétrie, tant que nous ne créons pas une distinction, c'est-à-dire tant que nous ne faisons pas une différence entre elles. Une façon de les différencier serait par exemple de définir une quantité par rapport à x uniquement.

Soit x' un élément de S tel que $P(x, x')$ est vrai.

Désormais, x n'est plus symétrique de y et z , puisque la propriété $P(x, x')$ est vrai, mais les propriétés $P(y, x')$ et $P(z, x')$ ne le sont pas forcément. En revanche, si nous avons écrit plutôt :

Soient x' , y' et z' trois éléments de S tels que $P(x, x')$, $P(y, y')$ et $P(z, z')$ sont vrais.

Dans ce cas, les couples (x, x') , (y, y') et (z, z') sont maintenant symétriques, réalisant ainsi une forme de symétrie entre x , y et z .

L'avantage d'une symétrie entre des variables est que toute propriété prouvée pour l'une est vraie pour l'autre. Ainsi, pour continuer l'exemple, si nous démontrons la proposition $Q(x, x')$, le même raisonnement à symétrie près nous permet de démontrer aussi $Q(y, y')$ et $Q(z, z')$. Plutôt que de tout réécrire, nous pouvons simplement invoquer la symétrie pour conclure immédiatement :

- (1) ... ; donc
- (2) $Q(x, x')$ est vrai ; donc par symétrie entre (x, x') , (y, y') et (z, z') .
- (3) $Q(y, y')$ et $Q(z, z')$ sont vrais.

De même, si x , y et z sont symétriques, et que nous prouvons $P(x, y)$, alors nous en déduisons par symétrie que $P(y, x)$, $P(y, z)$, $P(z, x)$,... sont vrais.

Les symétries peuvent aussi utiliser pour réduire le nombre de cas à étudier, en permettant de choisir laquelle des variables symétriques possède une propriété particulière : si nous arrivons à démontrer que $P(x)$ ou $P(y)$ ou $P(z)$ est vrai, alors nous pouvons décider que $P(x)$ est vrai (quitte à échanger la valeur de x avec celle de y ou de z). Dans ce cas, la symétrie est rompue entre x et les deux autres variables, par contre y et z restent symétriques.

Exemple 1.2.3. Montrons que parmi trois entiers arbitraires, il en existe deux dont la somme est paire. Formellement : pour tous entiers m , n et p , $m + n$ est pair ou $m + p$ est pair ou $n + p$ est pair.

- (1) Soient m , n , p trois entiers quelconques.
- (2) Premier cas : au moins deux des trois entiers sont pairs. Par symétrie, nous pouvons supposer que
- (3) m et n sont pairs.
- (4) Soit k et h tels que $m = 2k$ et $n = 2h$ (par définition de pair) ; alors
- (5) $m + n = 2k + 2h = 2(k + h)$ (par arithmétique) ; donc
- (6) $m + n$ est pair (par définition de pair).
- (7) Deuxième cas : au plus un des trois entiers est pair, donc
- (8) au moins deux des trois entiers sont impairs. Par symétrie nous pouvons supposer que

- (9) m et n sont impairs.
- (10) Soit k et h tels que $m = 2k + 1$ et $n = 2h + 1$ (par définition de impair); alors
- (11) $m + n = 2k + 1 + 2h + 1 = 2(k + h + 1)$ (par arithmétique); donc
- (12) $m + n$ est pair (par définition de pair).

Un autre exemple typique pour rompre la symétrie de plusieurs variables sur un ensemble ordonné est de les trier :

Soient x_1, x_2, \dots, x_k k entiers distincts, avec $x_1 < x_2 < \dots < x_k$.

Ici, les variables x_1 à x_k sont d'abord symétriques, puis nous distinguons x_1 comme étant la plus petite, laissant les autres symétriques, puis nous distinguons x_2 comme la plus petite des autres, et ainsi de suite. Au final, cette définition ne laisse aucune symétrie entre les variables. Remarquons bien cependant que les symétries peuvent être utiles dans le raisonnement et qu'il est préférable de les exploiter plutôt que de les éliminer.

1.3 Techniques de démonstration

Nous donnons ici quelques techniques de démonstration, nous vous conseillons le visionnage de la vidéo suivante pour une introduction plus complète : <https://www.canal-u.tv/chaines/canal-unisciel/logique-ensembles-raisonnements/logique-et-raisonnements-partie-2>

Démonstration directe La démonstration directe consiste à partir des hypothèses et à appliquer des raisonnements logiques pour arriver à la conclusion.

Exemple 1.3.1. Montrons que la somme de deux nombres pairs est paire, c'est-à-dire la proposition : pour tous n et m entiers, si n et m sont pairs, alors $n + m$ est pair.

- (1) Soient n et m deux entiers pairs.
- (2) Soit p un entier tel que $n = 2p$ (par définition de pair et (1)).
- (3) Soit q un entier tel que $m = 2q$ (par définition de pair et (1)). Alors,
- (4) $n + m = 2p + 2q = 2(p + q)$ (par (2), (3) et arithmétique); donc
- (5) il existe un entier k tel que $n + m = 2k$ (en prenant $k = p + q$ par (4)); donc
- (6) $n + m$ est pair (par définition de pair). Ainsi [(1) à (6)],
- (7) la somme de deux entiers pairs est pair.

Raisonnement par l'absurde Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que l'énoncé à démontrer est faux, puis à montrer que cela conduit à une contradiction. En pratique, pour prouver une proposition A , nous prenons comme hypothèse que la négation de A , en mentionnant bien que cette hypothèse est prise en vue d'établir une preuve par l'absurde. La suite est une démonstration visant à aboutir à établir la véracité d'une proposition et de sa négation, ce qui constitue une contradiction. Nous terminons alors en précisant la nature de la contradiction, ce qui permet d'en déduire que l'hypothèse $\neg A$ était fautive, donc que A est vrai par le principe du *tiers-exclu* (A est vrai ou fautive, il n'y a pas de troisième option).

Exemple 1.3.2. Montrons que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

- (1) Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel.
- (2) Soit p et q deux naturels premiers entre eux tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (définition de rationnel et (1)). Alors,
- (3) $2 = \frac{p^2}{q^2}$ (en prenant le carré de (2)); donc

- (4) $p^2 = 2q^2$ (par arithmétique); donc
- (5) p est pair (par définition de pair); donc
- (6) soit k un entier naturel tel que $p = 2k$. Alors
- (7) $4k^2 = 2q^2$ (par substitution de (6) dans (4) et arithmétique); donc
- (8) $q^2 = 2k^2$; donc
- (9) q^2 est pair; donc
- (10) q est pair.
- (11) p et q sont divisibles par 2 (par (5) et (10));
- (12) contradiction avec (2) (par définition de premiers entre eux). Ainsi [(1) à (12)],
- (13) $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Toutes les propositions déduites de l'hypothèse initiale sont déduites d'une proposition fausse. Ainsi une fois la preuve par l'absurde terminée, aucune de ces propositions n'est réutilisables. C'est une des limites des preuves par l'absurde qui font que les preuves directes sont généralement préférables. En revanche, les preuves par l'absurde sont parfois significativement plus simples que les preuves directes.

Nous employons souvent les preuves par l'absurde pour montrer des propositions de la forme "il n'existe pas x tel que ...". C'est le cas dans l'exemple, puisqu'il s'agit de montrer qu'il n'existe pas une fraction $\frac{p}{q}$ égale à $\sqrt{2}$.

Raisonnement par récurrence La démonstration par récurrence est une méthode utilisée pour démontrer des énoncés définis sur les entiers naturels. Pour prouver une propriété (prédicat) portant sur tous les entiers, il suffit de la prouver pour 0, puis de prouver que si elle est vraie entier n , alors elle l'est aussi pour l'entier $n + 1$.

Une bonne image mentale de la preuve par récurrence est celle d'une série de dominos alignés. Nous voulons nous assurer que tous les dominos tombent. Pour cela, il suffit de garantir que :

- ▷ (Base) le premier domino tombe;
- ▷ (Induction) si un domino tombe, alors le suivant tombe aussi.

Définition 1.3.3 (Prédicat). Un **prédicat** est une fonction qui associe une valeur de vérité à chaque valeur d'entrée.

Par exemple, soit un prédicat $P(x)$ défini par :

$$P(x) = \text{"}x \text{ est un nombre pair"}$$

Alors

- ▷ $P(2)$ est vrai
- ▷ $P(3)$ est faux

Théorème 1.3.4. Soit $P(n)$ un prédicat dépendant de l'entier n . Considérons les deux propositions suivantes.

- ▷ (Base) $P(0)$ est vrai;
 - ▷ (Induction) pour tout entier n : si $P(n)$ est vrai alors $P(n + 1)$ est vrai.
- Si (Base) et (Induction) sont vérifiées, alors pour tout entier n , $P(n)$ est vrai.

Nous appellerons souvent P l'*hypothèse de récurrence*. Une preuve par récurrence se compose donc des plusieurs parties :

1. Nous initions la preuve en explicitant l'hypothèse de récurrence, et annonçons notre intention de la prouver par récurrence.

2. Nous prouvons le cas de base.
3. Nous commençons le cas d'induction en définissant un entier n arbitraire, puisque nous devons prouver une proposition de la forme “pour tout entier n ”.
4. Ensuite nous introduisons l'hypothèse que $P(n)$ est vrai, puisque nous devons montrer l'implication “si $P(n)$ est vrai, alors $P(n + 1)$ est vrai”. Cette hypothèse est appelée *hypothèse d'induction*.
5. Puis, utilisant cette hypothèse d'induction, nous démontrons $P(n + 1)$, obtenant ainsi l'implication.
6. Nous concluons en affirmant que par récurrence, pour tout entier n , $P(n)$ est vrai.

Exemple 1.3.5. Prouvons une formule pour la somme des n premiers entiers.

- (1) Soit $S_n = \sum_{i=0}^n i$.
- (2) Soit $P(n)$, pour $n \geq 0$, la proposition $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Prouvons par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $P(n)$ est vrai.
- (3) (Base) Soit $n = 0$.
- (4) $S_n = S_0 = \sum i = 0^0 i = 0$; et
- (5) $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{0 \times 1}{2} = 0$; donc
- (6) $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (par transitivité, (4) et (5)).
Ainsi [(3) à (6)], le case de base $P(0)$ est vérifié.
- (7) (Induction) Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel arbitraire.
- (8) Supposons que $P(n)$ est vrai. Alors
- (9) $S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^n i + (n + 1) = S_n + (n + 1)$ (par arithmétique); et
- (10) $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (par hypothèse d'induction (8)); donc
- (11) $S_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1)$ (par substitution de (10) dans (9)); donc
- (12) $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ (par simplification); c'est-à-dire
- (13) $P(n + 1)$ est vrai (par définition (2)). Ainsi [(8) à (13)],
- (14) $P(n)$ implique $P(n + 1)$; ainsi [(7) à (14)],
- (15) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ implique $P(n + 1)$. Par principe de récurrence [(3) à (15)],
- (16) pour tout entier n , $P(n)$ est vrai.

Le schéma de preuve par récurrence s'étend aux définitions inductives, dont les entiers naturels sont un cas particulier.

Bien entendu, il est possible de modifier un peu le schéma de récurrence, pour prouver qu'une propriété est vraie pour tout $n \geq k$, pour k fixé. Il suffit de prouver les deux conditions suivantes :

- ▷ (Base) $P(k)$ est vrai ;
- ▷ (Induction) si $P(n)$ est vrai alors $P(n + 1)$ est vrai, pour tout entier $n \geq k$.

Cela revient à démontrer par récurrence la proposition : pour tout entier n , si $n \geq k$ alors $P(n)$.

Dans certains cas, le schéma de preuve par récurrence n'est pas suffisant. Nous pouvons alors alors recourir au second principe de récurrence :

Théorème 1.3.6. Soit $P(n)$ un prédicat (une propriété) dépendant de l'entier n . Posons, pour tout entier n , la proposition

$$H(n) := (\text{pour tout } i < n, P(i)) \implies P(n).$$

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H(n)$ est vraie, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vrai .

Cela revient essentiellement à démontrer par récurrence la proposition $H(n)$: “pour tout entier $i \leq n$, $P(i)$ est vrai”.

Chapitre 2

Ensembles et dénombrement

2.1 Les ensembles

Un **ensemble** est une collection d'éléments distincts. Formellement, les ensembles sont définis par les axiomes de la théorie des ensembles, que nous ne détaillerons pas. Ces axiomes décrivent les règles permettant de définir rigoureusement ce qu'est un ensemble, les manipulations autorisées sur les ensembles, et postulent l'existence d'ensembles comme l'ensemble vide et des ensembles infinis, tout en évitant des paradoxes comme le *paradoxe du barbier*.

De notre point de vue, l'essentiel réside dans la relation \in d'appartenance entre les éléments et les ensembles : $x \in E$ signifie que x appartient à l'ensemble E , $x \notin E$ qu'il n'appartient pas à l'ensemble E .

Nous rappelons ici les opérations classiques sur les ensembles et les principales propriétés. Dans le tableau suivant, A, B désignent des sous-ensembles d'un ensemble E , e est un élément de E et n un entier strictement positif.

Notation	signification
$e \in A$	e appartient à A
$A \subseteq B$	A est inclus dans B : tout élément de A est un élément de B
\emptyset	l'ensemble vide : aucun élément n'appartient à cet ensemble
$A \cup B$	l'union de A et B : $e \in A \cup B$ si $e \in A$ ou $e \in B$
$A \cap B$	l'intersection de A et B : $e \in A \cap B$ si $e \in A$ et $e \in B$
$A \times B$	le produit cartésien de A et B : $(a, b) \in A \times B$ si $a \in A$ et $b \in B$
A^n	le produit itéré de A : $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i \in A$
$A \setminus B$ ou $A - B$	la différence ensembliste : $e \in A \setminus B$ si $e \in A$ et $e \notin B$
$A \Delta B$	la différence symétrique : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
$\mathcal{P}(A)$ ou 2^A	l'ensemble des parties de A : $X \in \mathcal{P}(A)$ si $X \subseteq A$
A^B	l'ensemble des fonctions de B vers A

Deux ensembles sont *disjoints* si leur intersection est l'ensemble vide \emptyset .

Exemple 2.1.1. Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1\}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{1\}, \\ A \cup B &= \{0, 1, 2, 3\}, \\ A \times B &= \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}, \\ A \setminus B &= \{2, 3\}, B \setminus A = \{0\}. \end{aligned}$$

Identités remarquables. Voici quelques faits et identités sur les ensembles.

Proposition 2.1.2. Les opérateurs \cup et \cap sont associatifs, commutatifs et idempotents : pour tous ensembles A et B ,

1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
2. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
3. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.

Proposition 2.1.3. Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E :

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité de l'union),
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivité de l'intersection),
3. $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$ (loi de De Morgan),
4. $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$ (loi de De Morgan).

Le complémentaire d'un sous-ensemble. Soit E un ensemble et soit $A \subseteq E$ un sous-ensemble de E . Le *complémentaire* de A vis-à-vis de E est l'ensemble $E \setminus A$, et est noté \bar{A} . Cette notion de complémentaire d'un ensemble A n'est donc valide que A est inclus dans un ensemble E servant d'ensemble de référence. Cependant, suivant le contexte, l'ensemble E n'est pas toujours précisé. Par exemple, dans le cas des graphes, le complémentaire d'un ensemble U de sommets du graphe $G = (V, E)$ sera $V \setminus U$, alors que le complémentaire d'un ensemble d'arête F sera $E \setminus F$. Le contexte est en général suffisant pour comprendre vis-à-vis de quel ensemble est pris le complémentaire. Ainsi dans la proposition suivante, le complémentaire est vis-à-vis de E .

Proposition 2.1.4. Soient A et B deux sous-ensembles de E . Alors,

1. $A \cup \bar{A} = E$;
2. $A \cap \bar{A} = \emptyset$;
3. $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Les partitions d'un ensemble Une *partition* d'un ensemble E est un ensemble $P := \{A_1, \dots, A_k\}$ de sous-ensembles de E tel que

- ▷ $E = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$;
- ▷ les ensembles A_1, A_2, \dots, A_k sont disjoints deux-à-deux.

Ainsi, si P est une partition de E , alors pour tout $e \in E$, il existe un unique ensemble $A \in P$ tel que $e \in A$. Par exemple, l'ensemble des classes d'équivalence d'une relation d'équivalence sur E est une partition de E .

Démontrer des inclusions. Nous aurons souvent à démontrer qu'un ensemble est inclus dans un autre, ou que deux ensembles sont égaux, ou encore que deux ensembles sont disjoints.

Pour démontrer une inclusion $A \subseteq B$, une stratégie commune est de prendre un élément arbitraire dans A , et de montrer qu'il est aussi dans B .

- (1) Soit $a \in A$.
- (2) ...; donc
- (3) $a \in B$. Ainsi [(1) à (3)],
- (4) $A \subseteq B$.

L'égalité de deux ensembles peut se montrer par double-inclusion :

Proposition 2.1.5. Pour tous ensembles A et B , $A = B$ ssi $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.

Une preuve d'égalité de deux ensembles pourra donc avoir cette forme :

- (1) ...; donc
- (2) $A \subseteq B$.
- (3) ...; donc
- (4) $B \subseteq A$.
- (5) $A = B$ (par double-inclusion (2) et (4)).

Pour prouver que deux ensembles A et B sont disjoints, nous pouvons prendre un élément de A et montrer qu'il n'appartient pas à B . Cette dernière partie sera souvent prouver par l'absurde.

- 1 Soit $a \in A$.
- 2 Supposons par l'absurde que $a \in B$. Alors,
- 3 ...
- 4 contradiction. Ainsi [(2) à (4)],
- 5 $a \notin B$. Ainsi [(1) à (5)],
- 6 $A \cap B = \emptyset$, A et B sont disjoints.

2.2 Les relations

Définition. Étant donné un ensemble E , et $n \geq 0$ un entier, une *relation n -aire* (ou d'arité n) sur E est un sous-ensemble de E^n .

Exemple 2.2.1.

1. $E = \{1, 2, 3\}$ et R est la relation binaire (d'arité 2) définie par $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.
2. $E = \mathbb{N}$ et S est la relation d'arité 2 définie par $S = \{(n, n + 1) : n \in \mathbb{N}\}$.
3. $E = \{1, 2, 3\}$ et R est la relation unaire (d'arité 1) définie par $R = \{1, 2\}$.

Attention aux relations définies sur des tuples ! Par exemple, la relation $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ est d'arité 2 sur \mathbb{N} , mais d'arité 1 sur \mathbb{N}^2 .

Notation Si R est une relation d'arité n , nous noterons $R(a_1, \dots, a_n)$ ssi $(a_1, \dots, a_n) \in R$.

Propriétés des relation binaires Une relation binaire R sur un ensemble E est dite :

▷ *réflexive* si

pour tout $x \in E$, $R(x, x)$;

▷ *symétrique* si

pour tout $x, y \in E$, si $R(x, y)$ alors $R(y, x)$;

▷ *antisymétrique* si

pour tout $x, y \in E$, si $R(x, y)$ et $R(y, x)$ alors $x = y$;

▷ *transitive* si

pour tout $x, y, z \in E$, si $R(x, y)$ et $R(y, z)$ alors $R(x, z)$.

Ces propriétés permettent de caractériser deux importants types de relations : les relations d'équivalence et les relations d'ordre.

Une relation binaire R est une

▷ *relation d'équivalence* si elle est réflexive, symétrique et transitive;

▷ *relation d'ordre* si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

On peut facilement vérifier que la relation d'égalité ($=$) sur n'importe quel ensemble est une relation d'équivalence, et que la relation \leq sur les entiers est une relation d'ordre.

Exemple 2.2.2. Considérons l'ensemble A^* des mots sur un alphabet A :

- ▷ La relation \equiv définie par $u \equiv v$ si u et v sont de même longueur est une relation d'équivalence.
- ▷ La relation $u \leq_{pref} v$ si u est préfixe de v est une relation d'ordre.

2.3 Dénombrement

La combinatoire est l'art de compter, c'est-à-dire de déterminer le nombre d'éléments dans un ensemble, ce que nous appelons aussi le *dénombrement*. Par extension, elle s'intéresse aussi à l'*énumération*, c'est-à-dire à établir une liste de tous les éléments d'un ensemble. Le dénombrement est lié au calcul de probabilité sur des ensembles discrets, mais nous n'aborderons pas cet aspect dans ce cours.

2.3.1 Cardinalité des ensembles

En général, la cardinalité d'un ensemble se définit comme une classe d'équivalence pour la relation "avoir une bijection" entre deux ensembles, ce qui permet d'avoir une notion de cardinalité pour les ensembles finis et infinis. Cependant nous ne travaillerons qu'avec des cardinalités pour les ensembles finis, nous utiliserons donc la définition simplifiée suivante :

Définition 2.3.1. Le *cardinal* d'un ensemble fini X est le plus petit entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe une injection de X dans $\{1, 2, \dots, n\}$. De manière équivalente, c'est l'unique entier n tel qu'il existe une bijection de X dans $\{1, 2, \dots, n\}$. Nous noterons $|X|$ le cardinal de X .

Rappelons qu'une *injection* de A dans B est une fonction $f : A \mapsto B$ telle que pour tous $a_1, a_2 \in A$, si $a_1 \neq a_2$ alors $f(a_1) \neq f(a_2)$. Une *surjection* de A dans B est une fonction $f : A \mapsto B$ telle que pour tout $b \in B$, il existe $a \in A$ tel que $b = f(a)$. Une *bijection* est une fonction injective et surjective. Les bijections sont *inversibles* : il existe une fonction f^{-1} , appelée *inverse*, tel que $f^{-1} \circ f = \text{Id}_A$ $f \circ f^{-1} = \text{Id}_B$ (la composition de f et de son inverse est la fonction identité).

Proposition 2.3.2. Si $f : A \mapsto B$ est une fonction :

- ▷ *injective* alors $|B| \geq |A|$;
- ▷ *surjective* alors $|A| \geq |B|$;
- ▷ *bijective* alors $|A| = |B|$.

Ainsi une technique pour démontrer que deux ensembles sont égaux consiste à trouver une bijection entre eux.

Nous avons aussi plusieurs identités remarquables :

Proposition 2.3.3. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E . Alors,

1. $|A| + |\bar{A}| = |E|$;
2. $|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$;
3. $|A| + |B| = |A \setminus B| + 2|A \cap B| + |B \setminus A|$;

4. $|A| + |B| = |A \cup B|$ ssi A et B sont disjoints ;
5. $|B| = |A \cup B|$ ssi $A \subseteq B$.

2.3.2 Règles de bases du dénombrement

Le restaurant universitaire nous propose dans son menu un ensemble de fromages F et un ensemble de desserts D .

Si nous devons choisir exactement un élément, soit un fromage, soit un dessert, combien de choix sont possibles? Autant que d'éléments dans $F \cup D$. C'est la *règle de l'alternative* :

Proposition 2.3.4. Pour deux ensembles A et B , A et B sont disjoints ssi $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Si plutôt nous devons choisir exactement un fromage et un dessert, cela revient à choisir un couple, c'est-à-dire un élément dans l'ensemble $A \times B$. C'est alors la *règle du produit* qui nous permet de dénombrer les solutions :

Proposition 2.3.5. Pour deux ensembles finis A et B arbitraires, $|A \times B| = |A| \times |B|$.

Si enfin nous devons plutôt choisir 3 desserts, pas nécessairement différents (nous pouvons choisir deux crêpes au chocolat et un yaourt à la fraise), alors les possibilités sont représentées par l'ensemble D^3 , et il nous faut utiliser la règle de la puissance.

Proposition 2.3.6. Pour un ensemble fini A et un entier naturel n , $|A^n| = |A|^n$.

Attention dans cette solution, prendre une crêpe, un yaourt puis une crêpe est une solution différente de prendre deux crêpes puis un yaourt. Plus généralement, nous avons

Proposition 2.3.7. Pour tous ensembles finis A et B , $|A^B| = |A|^{|B|}$.

Puisque A^B est l'ensemble des fonctions de B vers A , cela nous permet de dénombrer les fonctions entre deux ensembles.

Remarquons comment les notations des opérations ensemblistes ont été choisies en cohérence avec leur effet sur la cardinalité des ensembles. Ces règles suffisent pour dénombrer les ensembles construits par union, produit et puissance d'ensembles élémentaires.

2.3.3 Règles avancées du dénombrement

Si les trois desserts à choisir doivent être différents, les règles de bases ne suffisent pas. Nous introduisons maintenant des règles plus complexes.

Cardinalité des parties d'un ensemble Quel est le nombre de sous-ensembles possibles d'un ensemble donné A ? Cette question correspond à pouvoir choisir n'importe quel nombre de desserts, tous différents.

Proposition 2.3.8. Soit A un ensemble fini, alors :

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}.$$

Un sous-ensemble peut se représenter comme une fonction de A dans un ensemble à deux éléments, par exemple $\{\text{vrai, faux}\}$, où vrai correspond aux éléments du sous-ensemble. C'est donc un cas particulier de la règle de la puissance.

Lemme des bergers Aussi appelée règle de la division, son nom vient de la situation suivante. Dans son troupeau de moutons, le berger compte n pattes. Considérant la fonction f qui à chaque patte associe le mouton ayant cette patte, puisque chaque mouton à 4 pattes, pour tout mouton m , $|f^{-1}(m)| = 4$ (aucun mouton n'est estropié). Fort de ses compétences en mathématiques (son instituteur l'ayant convaincu de l'importance de cette discipline pour la garde des moutons), le berger en déduit fort logiquement que le troupeau contient $n/4$ moutons.

Pour toute fonction $f : A \mapsto B$, et pour tout $b \in B$, nous notons $f^{-1}(b)$ le sous-ensemble $\{a \in A : f(a) = b\}$ des éléments A ayant b comme image par f , et nous l'appelons *image inverse* de b . Si f est une surjection, l'ensemble $\{f^{-1}(b) : b \in B\}$ est une partition de A (si f n'est pas une surjection, il contiendra en plus l'ensemble vide). Alors $|A| = \sum_{b \in B} |f^{-1}(b)|$. Dans le cas où toutes les images inverses ont le même cardinal k (tous les moutons ont le même nombre de pattes), nous obtenons $|A| = k|B|$. En résumé :

Proposition 2.3.9. Soient $f : A \rightarrow B$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que pour tout élément $y \in B$, $|f^{-1}(y)| = k$. Alors $|A| = k \times |B|$

Remarquons que dans le cas d'une bijection, $k = 1$ et que cela revient à l'égalité de cardinal entre deux ensembles en bijection.

Permutation : ordonnancement. Si un gourmand a pris 4 desserts différents, quel est le nombre d'ordres possibles dans lesquels les manger ?

Définition 2.3.10. Soit E un ensemble fini de cardinal n . Une *permutation* de E est une bijection de $\{1, 2, \dots, n\}$ dans E . Nous notons $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des permutations sur l'ensemble E , et \mathfrak{S}_n l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$

La bijection fixe un ordre sur les éléments de l'ensemble.

Proposition 2.3.11. Le cardinal de $\mathfrak{S}(E)$ est $|E|!$; $|\mathfrak{S}_n| = n!$.

Ici $n!$ représente la factorielle de n , définie par $n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \times 2 \times \dots \times n$.

Arrangements : choix distincts ordonnés. Un arrangement consiste à choisir dans un certain ordre k éléments distincts dans un ensemble E . Par exemple nous voulons prendre 3 desserts différents parmi ceux proposés et fixer l'ordre dans lequel les manger.

Définition 2.3.12. Soit E un ensemble fini de cardinal n et $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Un *arrangement* de k éléments de E un k -uplet d'éléments distincts de E . Nous notons \mathcal{A}_E^k l'ensemble des k -arrangements de E .

Le nombre de k -arrangements d'un ensemble E de cardinal n est égal au nombre de k -arrangements de $\{1, \dots, n\}$. Nous notons \mathcal{A}_n^k l'ensemble de ces arrangements.

Proposition 2.3.13.

$$|\mathcal{A}_n^k| = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemple 2.3.14. Le nombre de podium (3 premières places) possibles pour une compétition

avec 25 participants est donc de

$$|\mathcal{A}_{25}^3| = \frac{25!}{22!} = 25 \times 24 \times 23$$

Combinaisons : choix distincts non-ordonnés. Une combinaison consiste à choisir sans tenir compte de l'ordre k éléments distincts dans un ensemble. Par exemple choisir trois desserts différents sans les ordonner. La différence avec les arrangements est que ces derniers sont ordonnés.

Définition 2.3.15. Soit E un ensemble fini de cardinal n et $k \in [1, n]$. Une *combinaison* de k éléments de E est un sous-ensemble de E de cardinal k . Nous notons \mathcal{C}_E^k l'ensemble des k -combinaisons de E et on note $\binom{n}{k}$ le cardinal de \mathcal{C}_E^k .

Proposition 2.3.16.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ainsi, pour le choix de 3 desserts distincts parmi les 10 proposés, nous avons $\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1}$ possibilités.

Chapitre 3

Graphes : définitions et concepts de base

La théorie des graphes est une branche des mathématiques et de l'informatique théorique qui étudie les propriétés des graphes. Un graphe est une structure composée de sommets (ou nœuds) reliés par des arêtes (ou arcs dans le cas orienté). Les graphes sont utilisés pour modéliser des réseaux, des relations, ou des problèmes combinatoires.

Nous distinguons principalement deux types de graphes, les graphes orientés (ou dirigés) et les graphes non-orientés. Dans ce cours, nous allons nous focaliser sur les graphes non-orientés, et en particulier sur les **graphes simples** qui sont des graphes non-orientés, sans arêtes parallèles ni boucle.

3.1 Définitions

Les graphes.

Définition 3.1.1. Un *graphe non-orienté simple* est un couple $G = (V, E)$ où

- ▷ V est un ensemble, dont les éléments sont appelés *sommets* (ou parfois *nœuds* ou *points*);
- ▷ E est un sous-ensemble fini de paires* de V , appelées *arêtes* (ou parfois *lignes* ou *liens*).

Une arête $\{u, v\} \in E$, pour $u, v \in V$, sera notée simplement uv si cela ne crée pas d'ambiguïté (et donc, uv et vu désignent la même arête). Le nombre de sommets est appelé l'*ordre* du graphe.

*. c'est-à-dire un ensemble de cardinal 2, à ne pas confondre avec un couple. Dans un couple, les deux éléments sont distingués : le premier et le deuxième, ce qui permet de dire que $(a, b) \neq (b, a)$. Dans une paire, les deux éléments sont indifférenciés, ainsi $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ sont deux façons de noter la même paire. Par ailleurs, le couple (a, a) existe, mais $\{a, a\}$ n'est pas une paire : c'est un ensemble qui se note aussi $\{a\}$.

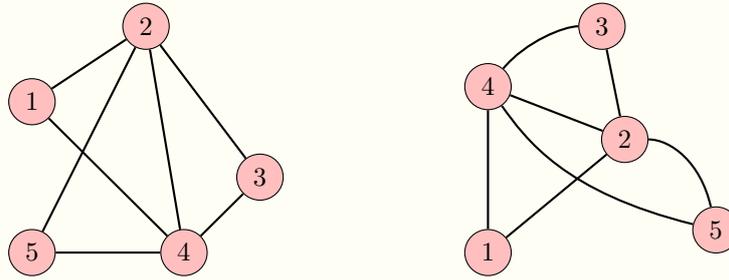
On peut voir un graphe simple comme un ensemble **muni d'une relation binaire symétrique et irréflexive**. Dans toute la suite du document, et sauf mention contraire, un graphe sera toujours considéré comme non-orienté simple.

Nous ne considérerons que des graphes finis, c'est-à-dire V sera toujours un ensemble fini. Pour un graphe G , nous noterons $V(G)$ l'ensemble de ses sommets, et $E(G)$ l'ensemble de ses arêtes. Les graphes sont souvent représentés dessinés dans le plan, chaque sommet étant représenté par un point et chaque arête par une courbe liant ses deux points.

Exemple 3.1.2. Considérons le graphe

$$G_1 = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}).$$

Ce graphe peut être représenté de plusieurs façons, par exemple en voici deux représentations différentes :



Incidence et Adjacence Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une arête e est *incidente* à un sommet x s'il existe un sommet y tel que $e = xy$. Deux sommets sont *adjacents* (ou *voisins*) s'ils sont incidents à la même arête. Autrement dit, x et y sont adjacents si $xy \in E$.

L'ensemble des voisins de $u \in V$ est noté $N_G(u)$ et est appelé *voisinage de u* . Un sommet sans voisin est dit *isolé*.

L'ensemble des arêtes incidentes à un sommet u est noté $\delta_G(u)$ (ou simplement $\delta(u)$ si le graphe considéré est évident) et est appelé *ensemble d'incidence de u* .

Exemple 3.1.3. Dans le graphe précédent G_1 , les sommets 1 et 2 sont adjacents et l'arête 12 est incidente à 1 et à 2.

Le voisinage du sommet 1 est $N_{G_1}(1) = \{2, 4\}$, le voisinage du sommet 4 est $N_{G_1}(4) = \{1, 2, 3, 5\}$.

L'ensemble d'incidence du sommet 1 est $\delta_{G_1}(1) = \{12, 24\}$, celui du sommet 4 est $\delta_{G_1}(4) = \{14, 24, 34, 45\}$.

Degré d'un sommet . Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le *degré* d'un sommet v , noté $d_G(v)$ (ou simplement $d(v)$) est le nombre d'arêtes incidentes à v . Ainsi, $d_G(v) = |\delta_G(v)|$.

Le *degré maximum* d'un graphe G est le maximum des degrés de ses sommets, nous le notons $d_{\max}(G)$:

$$d_{\max}(G) = \max\{d_G(v) : v \in V\}.$$

Le *degré minimum* d'un graphe G est le minimum des degrés de ses sommets, et nous le notons $d_{\min}(G)$:

$$d_{\min}(G) = \min\{d_G(v) : v \in V\}.$$

Exemple 3.1.4. Toujours pour le même graphe de l'Exemple 3.1.2, $d_{G_1}(1) = 2, d_{G_1}(4) = 4, d_{G_1}(3) = 2$. 4 est un sommet de degré maximum, donc $d_{\max}(G_1) = 4$. Le sommet 1 est un sommet de degré minimum, donc $d_{\min}(G_1) = 2$.

Voici un résultat qui resservira à de nombreuses reprises, liant le nombre d'arêtes et les degrés des sommets d'un graphe.

Lemme 3.1.5. Pour tout graphe $G = (V, E)$, la somme des degrés de tous les sommets est égale à deux fois le nombre d'arêtes :

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|.$$

Nous en déduisons :

Corollaire 3.1.6. La somme des degrés des sommets d'un graphe est paire.

Degré d'un ensemble. Nous étendons les notions de degré et d'incidence aux ensembles de sommets :

Définition 3.1.7. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Soit $U \subseteq V$ un sous-ensemble de sommets. Nous notons

$$\triangleright \delta_G(U) := \{uv \in E : u \in U, v \notin U\};$$

$$\triangleright d_G(U) := |\delta_G(U)|.$$

Notons que $\delta_G(U) = \delta_G(V \setminus U)$.

Un ensemble d'arêtes $F \subseteq E$ non-vide tel qu'il existe $U \subseteq V$ avec $F = \delta_G(U)$ est appelé *coupe* du graphe. U et $V \setminus U$ sont appelés les *bords* de la coupe F .

3.2 Isomorphisme, sous-graphe et complémentaire

Isomorphisme. La notion d'isomorphisme de graphe permet de capturer l'idée que certains graphes sont identiques du point de vue des relations d'adjacence, quand bien même les ensembles de sommets ne sont pas égaux. Pour être isomorphes, deux graphes doivent donc avoir le même nombre de sommets, le même nombre d'arêtes, mais ce n'est pas suffisant, comme le montre les deux graphes ci-dessous qui ne sont clairement pas équivalents.



Pour être isomorphe, il faut pouvoir identifier les sommets du premier graphe au second, d'une façon compatible avec les adjacences.

Définition 3.2.1. Un *isomorphisme* du graphe G sur le graphe H est une **bijection** $h : V(G) \rightarrow V(H)$ telle que

pour tous sommets x, y de G , $xy \in E(G)$ si et seulement si $h(x)h(y) \in E(H)$.

S'il existe un isomorphisme h entre deux graphes G et H , ces graphes sont dits isomorphes.

Exemple 3.2.2. Le graphe

$$H = (\{a, b, c, d, e\}, \{\{b, a\}, \{b, d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}),$$

est isomorphe au graphe G de l'[Exemple 3.1.2](#), via l'application $h : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{a, b, c, d, e\}$ définie par : $h : 1 \mapsto b, 2 \mapsto a, 3 \mapsto c, 4 \mapsto d, 5 \mapsto e$.

Proposition 3.2.3. La relation d'isomorphisme de graphe est une relation d'équivalence qu'on notera \equiv .

Nous étudierons les graphes à isomorphisme près, c'est-à-dire que nous considérerons que deux graphes isomorphes sont en fait égaux.

Remarquons que si f est un isomorphisme de G sur H alors $|V(G)| = |V(H)|$ et $|E(G)| = |E(H)|$, et plus, pour tout $v \in V(G)$, $d_G(v) = d_H(f(v))$.

Sous-graphes. Un sous-graphe d'un graphe G est un graphe H qui "apparaît" dans G . Il existe en fait plusieurs notions de sous-graphes, nous en retenons deux : les sous-graphes (tout court) et les sous-graphes induits. Un sous-graphe s'obtient en supprimant des sommets et des arêtes arbitrairement (supprimer un sommet supprime aussi toutes les arêtes incidentes).

Définition 3.2.4. (Sous-graphe) Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sous-graphe H de G est un graphe (U, F) tel que $U \subseteq V$ et $F \subseteq E \setminus (\bigcup_{v \in \bar{U}} \delta_G(v))$. Nous le notons alors $H \preceq G$.

Un sous-graphe induit s'obtient en supprimant uniquement des sommets et les arêtes incidentes. Un sous-graphe induit est donc un cas particulier de sous-graphe, pour lequel nous gardons toutes les arêtes entre les sommets sélectionnés.

Définition 3.2.5. (Sous-graphe induit) Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sous-graphe induit de G est un graphe (U, F) avec $U \subseteq V$ et $F = E \setminus (\bigcup_{v \in \bar{U}} \delta_G(v))$. Autrement dit, $F = \{uv \in E : u \in U \text{ et } v \in U\}$.

Soit H un graphe fixe, par exemple $H = C_4$ le graphe à quatre sommets et 4 arêtes formant un cycle. Puisque nous considérons les graphes à isomorphisme près, nous pourrions dire "G contient un sous-graphe H" s'il admet un sous-graphe isomorphe à H . Similairement nous dirons "G contient un sous-graphe-induit H" s'il contient un sous-graphe induit isomorphe à C_4 .

Si G "contient" un sous-graphe H , c'est-à-dire si H est isomorphe à un sous-graphe de G , cela signifie qu'il existe une injection $f : V(H) \mapsto V(G)$ telle que pour tout $uv \in E(H)$,

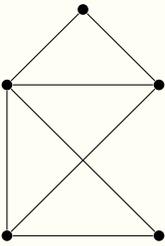
$$f(u)f(v) \in E(G).$$

Si G "contient" un sous-graphe induit H , c'est-à-dire si H est isomorphe à un sous-graphe induit de G , cela signifie qu'il existe une injection $f : V(H) \mapsto V(G)$ telle que pour tous $u, v \in V(H)$,

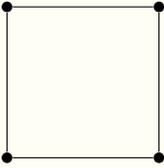
$$uv \in E(H) \text{ si et seulement si } f(u)f(v) \in E(G).$$

Par exemple, dire que G contient un sous-graphe $C_4 = \text{cyclo4}$, c'est dire que G contient quatre sommets distincts u, v, w, z et quatre arêtes uv, vw, wz, zu . Dire que G contient un sous-graphe induit C_4 , c'est dire que G contient quatre sommets distincts u, v, w, z , quatre arêtes uv, vw, wz, zu , et que uw, vz ne sont pas des arêtes.

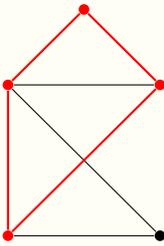
Exemple 3.2.6. Le graphe G ci-dessous contient-il un sous-graphe C_4 ? oui, en gardant les sommets et les arêtes rouges du dessin de droite ci-dessous.



G

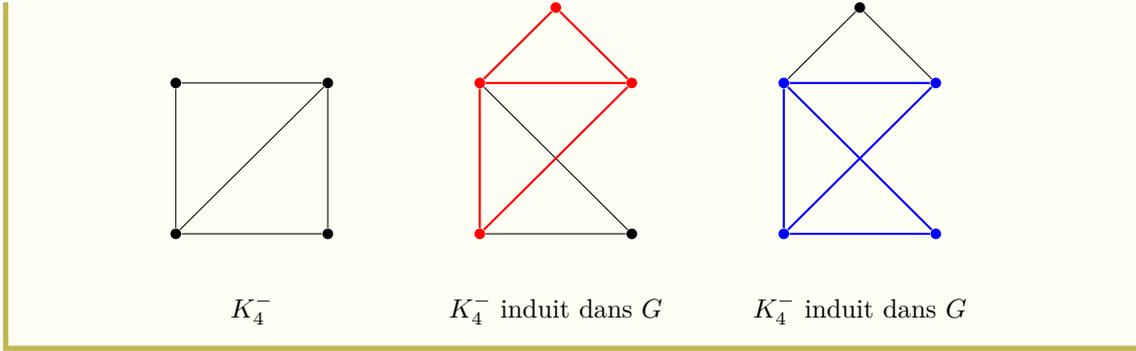


C_4

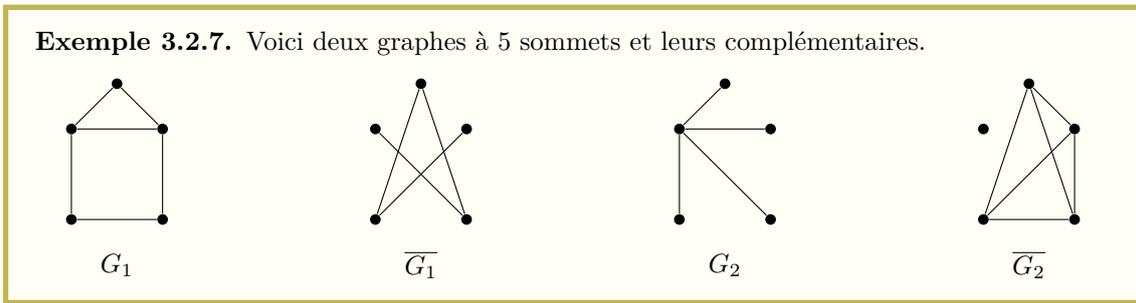


$C_4 \preceq G$

Contient-il un sous-graphe induit C_4 ? Non, par contre il contient deux exemplaires de sous-graphe-induit K_4^- comme le montre la figure suivante.



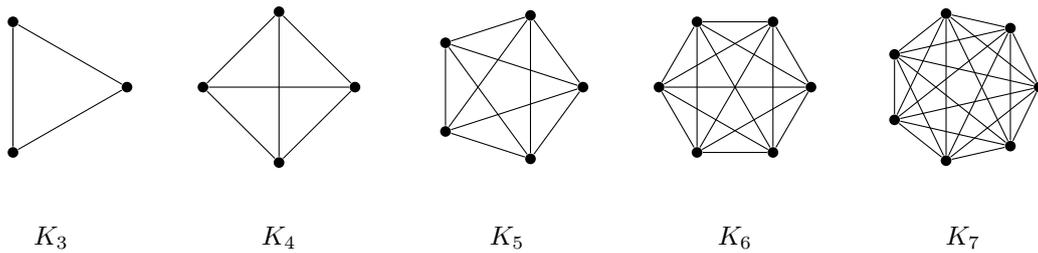
Grphe complémentaire Pour un graphe $G = (V, E)$, le *graphe complémentaire* de G , noté \overline{G} , est le graphe (V, \overline{E}) avec \overline{E} l'ensemble des paires uv de sommets telles que $uv \notin E$. Autrement dit, \overline{G} contient exactement les arêtes qui ne sont pas dans G . \overline{E} est l'ensemble complémentaire de E par rapport à l'ensemble de toutes les paires $\{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$.



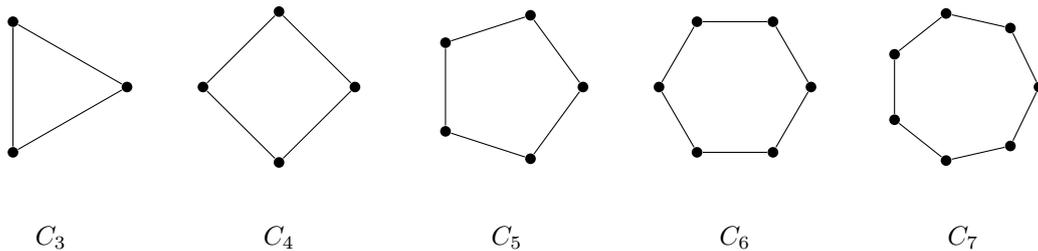
3.3 Quelques exemples de familles de graphes

Parmi les graphes, certains sont quelconques et d'autres sont célèbres. Voici quelques exemples de familles de graphes.

Les graphes complets . Un *graphe complet* est un graphe dans lequel chaque paire de sommets est adjacente. Pour tout n il existe un unique (à isomorphisme près) graphe complet à n sommets. Nous le nommons K_n et l'appelons aussi n -clique.



Les cycles. Le cycle d'ordre n est un graphe $C_n = (V, E)$ tel que $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ et $E = \{v_i v_{i+1} : i \in \{1, \dots, n-1\}\} \cup \{v_n v_1\}$.



Les graphes bipartis. Un graphe $G = (V, E)$ est dit *biparti* si

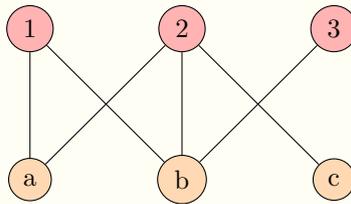
- ▷ V peut être partitionné en deux sous-ensembles disjoints V_1 et V_2
- ▷ pour toute arête $e \in E$, e a une extrémité dans V_1 et une extrémité dans V_2 .

Autrement dit, deux sommets adjacents ne peuvent pas être dans la même partie. Nous pourrions définir un graphe biparti par $G = (V_1, V_2, E)$ directement pour expliciter une bipartition du graphe.

Exemple 3.3.1. Prenons le graphe biparti suivant $G = (V_1, V_2, E)$, où :

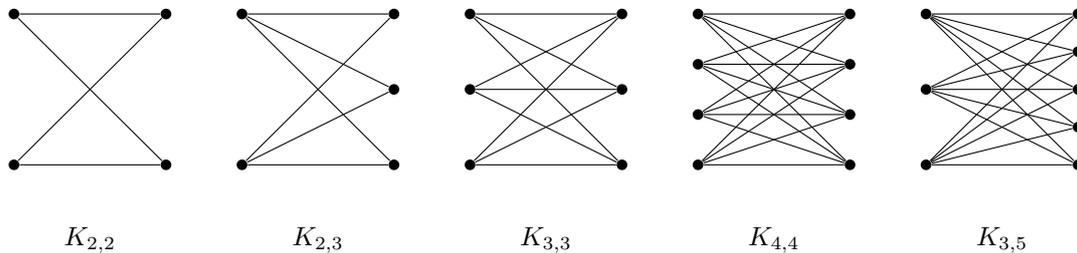
$$V_1 = \{a, b, c\}, \quad V_2 = \{1, 2, 3\}$$

et les arêtes sont $E = \{(a, 1), (a, 2), (b, 2), (b, 3), (c, 2), (b, 1)\}$.

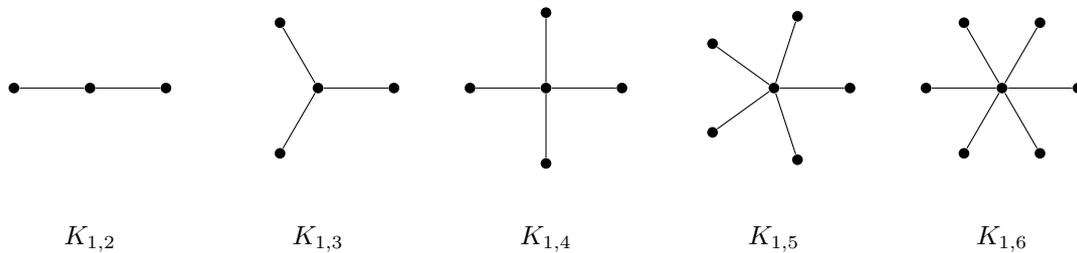


Graphe biparti complet : Un graphe biparti $G = (V_1, V_2, E)$ est dit *biparti complet* si pour tous $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$, $v_1 v_2 \in E$. On note $K_{n,m}$ le graphe biparti complet (V_1, V_2, E) satisfaisant $|V_1| = n$ et $|V_2| = m$.

Chaque choix de n et m donne lieu à un graphe biparti complet (à isomorphisme près). Voici une illustrations de graphes bipartis complets :

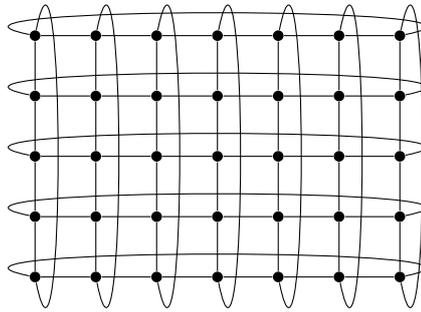
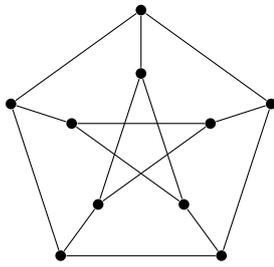


Un cas spécial de biparti complet est l'*étoile*, dont l'une des parties est un singleton :



Les graphes réguliers. Un graphe est dit *k-régulier* si tous ses sommets sont de degré k . En particulier, les graphes 3-réguliers sont aussi appelés graphes *cubiques*.

Le *graphe de Petersen* est un graphe 3-régulier, connu pour être un contre-exemple à de nombreuses conjectures trop naïves. Le *tore* à n lignes et m colonnes est un graphe 4-régulier. Voici celui à 5 lignes et 7 colonnes.



Chapitre 4

Chemins, circuits et composantes connexes

4.1 Marches et chemins

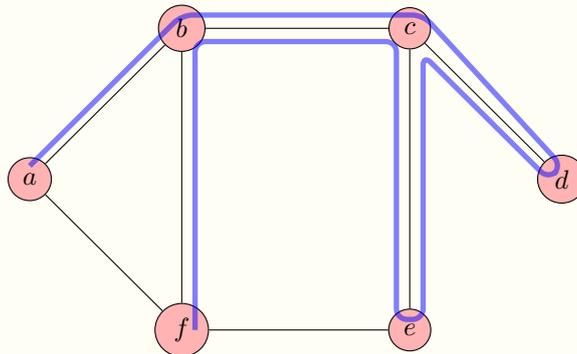
Définition 4.1.1. Soit G un graphe. Une *marche* dans G est une séquence de sommets $W := u_0, u_1, \dots, u_k$ de V tels que pour tout entier $i \in \{1, \dots, k\}$, $u_{i-1}u_i$ est une arête de G . u_0 et u_k sont appelés les *extrémités* de la marche. k est appelé la *longueur* de la marche. Nous noterons :

- ▷ $V(W) := \{u_i : i \in \{0, \dots, k\}\}$;
- ▷ $E(W) := \{u_{i-1}u_i : i \in \{1, \dots, k\}\}$.

Une marche est *fermée* si ses deux extrémités sont identiques. Nous dirons qu'une marche *passse* par un sommet u si elle contient le sommet u (y compris en extrémité). Elle *passse* par l'arête uv si u et v apparaissent consécutivement dans la marche.

Une marche peut passer plusieurs fois par le même sommet ou la même arête.

Exemple 4.1.2. Voici en bleu une illustration de la marche $a, b, c, d, c, e, c, b, f$ de longueur 8 et d'extrémités a et f . Elle n'est pas fermée. Elle passe deux fois par les arêtes bc , cd , ce , deux fois par les sommets b et d et trois fois par le sommet c .



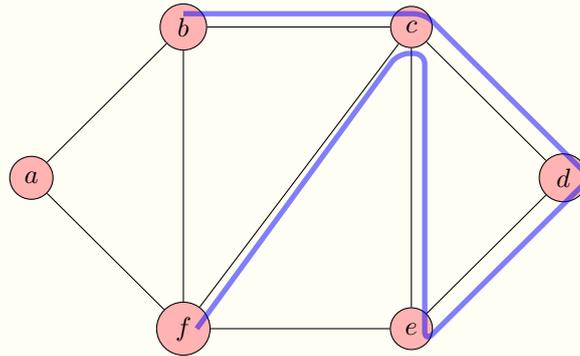
Définition 4.1.3. Soit G un graphe. Un *chemin* dans G est une marche $P := u_0, u_1, \dots, u_k$

utilisant au plus une fois chaque arête :

$$\text{pour tous } i, j \in \{1, \dots, k\} \text{ distincts, } u_{i-1}u_i \neq u_{j-1}u_j.$$

Un chemin peut donc passer plusieurs fois par le même sommet, mais pas par la même arête.

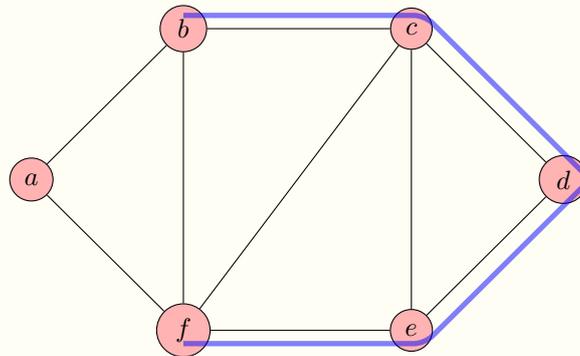
Exemple 4.1.4. Voici en bleu une illustration du chemin b, c, d, e, c, f de longueur 5 et d'extrémités b et f . Il n'est pas fermée. Il passe deux fois par le sommet c , et ne passe bien qu'au plus une fois par chaque arête.



Définition 4.1.5. Soit G un graphe. Un chemin $P := u_0, u_1, \dots, u_k$ de G est dit *simple* si ses sommets u_0, u_1, \dots, u_k sont distincts.

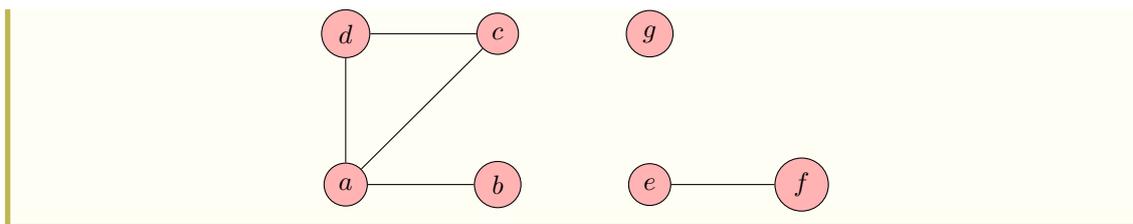
Un chemin simple passe donc au plus une fois par chaque sommet et par chaque arête.

Exemple 4.1.6. Voici en bleu une illustration du chemin simple b, c, d, e, f de longueur 4 et d'extrémités b et f . Il n'est pas fermée. Il passe au plus une fois par chaque sommet.



Définition 4.1.7. Soit G un graphe. Deux sommets u et v de G sont *connectés* s'il existe une marche entre u et v .

Exemple 4.1.8. Dans le graphe suivant, les sommets a, b, c, d sont connectés deux-à-deux, et les sommets e et f sont connectés. Le sommet a n'est pas connecté aux sommets e, f et g .



Proposition 4.1.9. Soit G un graphe, et soient u et v deux sommets de G . S'il existe une marche d'extrémités u et v , alors il existe un chemin simple d'extrémité u et v .

Ainsi, deux sommets sont connectés s'il existe une marche les ayant comme extrémités. Cela permet de montrer la transitivité dans la proposition suivante.

Proposition 4.1.10. La relation *être connecté* est une relation d'équivalence.

Cette relation est simplement la clôture transitive et réflexive de la relation d'adjacence des sommets (qui est clairement symétrique puisque nous considérons les graphes non-orientés).

Définition 4.1.11. Soit G un graphe. Les classes d'équivalence de la relation *être connecté* sont appelées les *composantes connexes* de G . Autrement dit, une composante connexe de G est un ensemble maximal de sommets U tel que pour tous $u, v \in U$, u et v sont connectés. Un graphe est dit *connexe* s'il possède une seule composante connexe. Le nombre de composantes connexes d'un graphe G est noté $c(G)$.

Le fait que U est un ensemble maximal de sommets avec la propriété P signifie que $P(U)$ est vrai, et que pour tout ensemble W contenant U proprement ($U \subset W$ et $U \neq W$), $P(W)$ est faux. U est donc un plus grand ensemble *par inclusion* avec la propriété P .

Exemple 4.1.12. Pour le graphe G de l'Exemple 4.1.8, les composantes connexes sont $\{a, b, c, d\}$, $\{e, f\}$ et $\{g\}$. Le graphe n'est pas connexe est comporte $c(G) = 3$ composantes connexes.

Définition 4.1.13. Soit $P = u_0, u_1, \dots, u_l$ une marche d'un graphe G . Alors pour toute paire $\{i, j\}$ avec $0 \leq i \leq j \leq l$, la *sous-marche* de P entre i et j est la marche $P[i, j] = u_i, u_{i+1}, \dots, u_j$.

Si P est un chemin, alors $P[i, j]$ aussi. Si P est un chemin simple, alors $P[i, j]$ aussi. Si P est un chemin simple, chaque sommet du chemin est identifiable à un unique indice, nous noterons donc $P[u, v]$ le sous-chemin de P entre u et v , défini par $P[u, v] = P[i, j]$ avec $u_i = u$ et $u_j = v$.

Définition 4.1.14. Un chemin (simple) est *maximal* s'il n'est sous-chemin d'aucun autre chemin (simple) que lui-même.

La prochaine proposition est de la forme

il existe X si et seulement si il n'existe pas Y .

Les résultats de cette nature sont particulièrement utiles, puisqu'ils permettent de facilement démontrer l'inexistence d'un objet. Rappelons que démontrer l'inexistence d'un objet avec une certaine propriété demande de montrer que tous les objets n'ont pas la propriété, c'est donc une propriété globale à tous les objets. À l'inverse pour démontrer l'existence d'un objet avec une propriété, il suffit d'exhiber un tel objet et de démontrer qu'il vérifie la propriété, c'est une propriété locale à un objet particulier. En général il est plus simple de démontrer des propriétés locales que des propriétés globales. Cependant, si X existe ssi Y n'existe pas, nous pouvons montrer que X n'existe pas en trouvant un Y qui existe, ou inversement prouver que Y n'existe pas en prouvant l'existence de X . Nous pouvons donc ramener la démonstration d'une propriété globale à celle d'une propriété locale, souvent plus simple.

Proposition 4.1.15. Soit G un graphe. Pour tous sommets u et v distincts de G , il n'existe pas de chemin d'extrémités u et v si et seulement si il existe un ensemble de sommets $U \subset V(G)$ tels que $u \in U$, $v \in V \setminus U$, et $\delta_G(U) = \emptyset$. Dans ce cas, nous dirons que U est le *bord d'une coupe vide*, ou que U *définit une coupe vide*.

Rappelons que $\delta_G(U)$ est l'ensemble des arêtes ayant exactement une extrémité dans U , et qu'un tel ensemble est appelé une coupe. Ainsi, pour montrer l'inexistence d'un chemin entre u et v , il suffit de trouver une coupe vide dont le bord contient u mais pas v . Pour montrer l'inexistence d'une coupe vide séparant u de v , il suffit de trouver un chemin entre u et v .

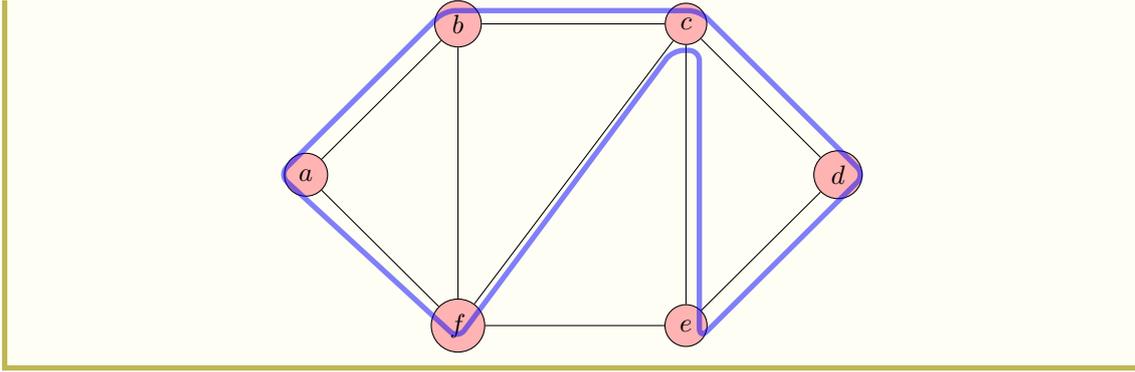
Exemple 4.1.16. Dans le graphe de l'[Exemple 4.1.8](#), il n'existe pas de chemin entre a et f : en effet il existe une coupe vide de bord $U = \{a, b, c, d, g\}$, avec $a \in U$ et $f \notin U$. De fait, il n'existe aucune arête ayant une extrémité dans U , et l'autre dans $V \setminus U = \{e, f\}$.

4.2 Cycles et circuits

Définition 4.2.1. Un *cycle* dans un graphe G est un chemin fermé, c'est-à-dire un chemin dont les deux extrémités sont identiques.

Contrairement à une marche fermée, un cycle ne peut pas utiliser plus d'une fois la même arête. En général, nous considérerons que deux cycles sont égaux s'ils sont la même séquence de sommets à rotation près. En ce sens un cycle n'a pas d'extrémité. Ainsi, les cycles u_0, u_1, \dots, u_l et $v_0, v_1, v_2, \dots, v_l$ sont égaux s'il existe un entier δ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, l\}$, $u_i = v_{i+\delta}$, les indices étant considérés dans la congruence modulo l .

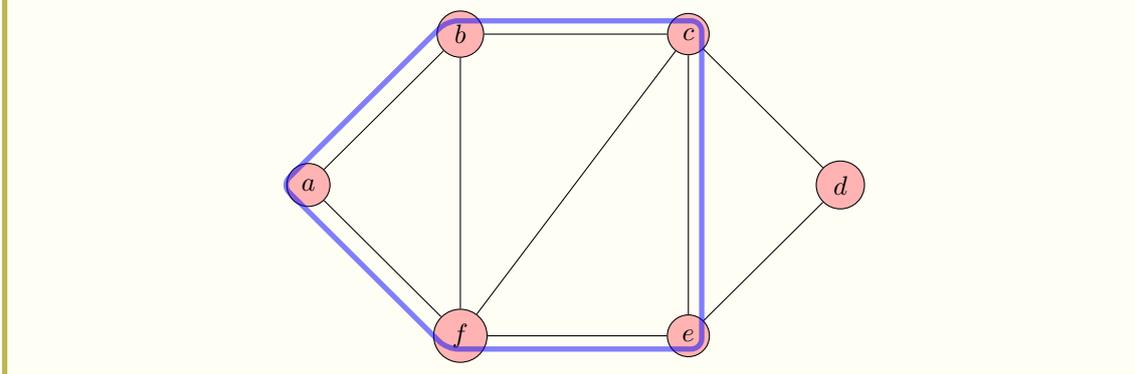
Exemple 4.2.2. Voici en bleu une illustration du cycle a, b, c, d, e, c, f, a de longueur 7. Il passe deux fois par le sommet c , et ne passe bien qu'au plus une fois par chaque arête. Nous considérons qu'il est égal au cycle d, e, c, f, a, b, c, d ou au cycle c, f, a, b, c, d, e, c . En revanche, le cycle a, b, c, e, d, c, f, a est différent, bien qu'il utilise les mêmes sommets et les mêmes arêtes, car la séquence de sommets n'est pas dans le même ordre.



Définition 4.2.3. Un *circuit* dans un graphe G est un cycle u_0, u_1, \dots, u_k dont tous les sommets u_1, u_2, \dots, u_k sont distincts (par définition de cycle, nous avons $u_0 = u_k$).

Tout comme les cycles, les circuits sont définis à rotation près des indices. Tout comme l'existence d'un chemin entre u et v implique l'existence d'un chemin entre u et v , l'existence d'un cycle (passant par un sommet u) dans G implique l'existence d'un circuit (passant par un sommet u) dans G .

Exemple 4.2.4. Voici en bleu une illustration du circuit a, b, c, e, f, a de longueur 5. Il passe par tous les sommets sauf d . Nous considérons qu'il est égal au cycle c, e, f, a, b, c ou au cycle e, f, a, b, c, e .



Proposition 4.2.5. Soient G un graphe, v un sommet de G et C un cycle dans G passant par v , alors il existe un circuit C' passant par v dans G tel que $E(C') \subseteq E(C)$.

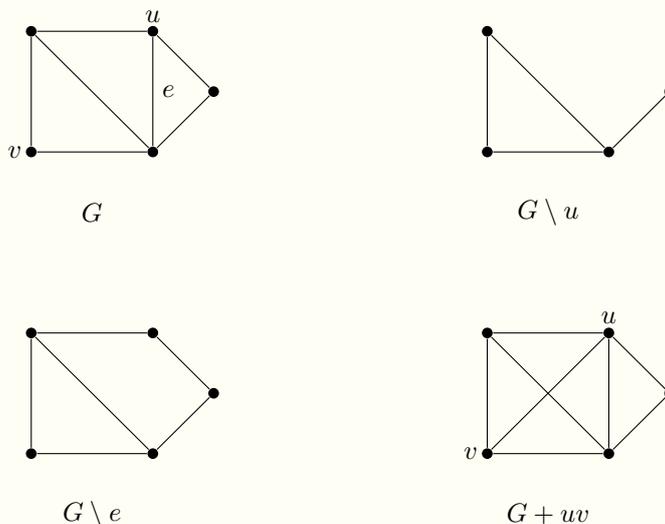
Définition 4.2.6. Un graphe est dit *acyclique* s'il ne possède pas de cycle (ou de manière équivalente s'il ne possède pas de circuit).

4.3 Connexité

Définition 4.3.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Soient $w, w' \in V$ deux sommets et $e = uv \in E$ une arête de G . Nous définissons les graphes

- ▷ $G \setminus w := (V \setminus \{w\}, E \setminus \delta_G(w))$, suppression du sommet w de G ;
- ▷ $G \setminus e := (V, E \setminus \{e\})$, suppression de l'arête e de G ;
- ▷ $G + ww' := (V, E \cup \{ww'\})$, l'ajout de l'arête ww' à G , lorsque $ww' \notin E$.

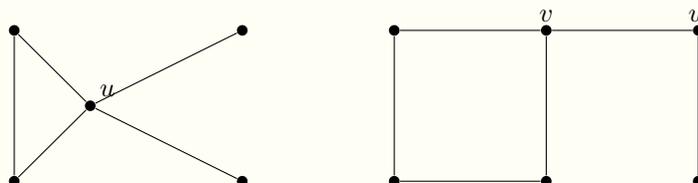
Exemple 4.3.2. Voici un graphe G , à partir duquel nous avons construit trois autres graphes en utilisant les opérations définies.



Rappelons que pour un graphe G , $c(G)$ dénote le nombre de composantes connexes de G , c'est-à-dire le nombre de classes d'équivalence de la relation "être connecté à". Les graphes connexes sont ceux pour lesquels $c(G) = 1$.

Définition 4.3.3. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sommet $u \in V$ est un *sommet d'articulation* de G si $c(G \setminus u) > c(G)$.

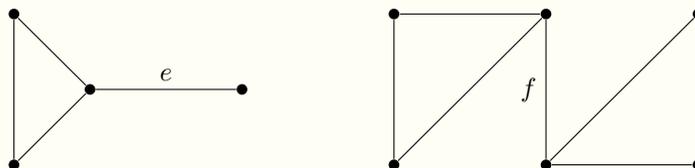
Exemple 4.3.4. Voici un graphe avec deux composantes connexes. Il possède trois sommets d'articulation : u, v et w . Retirer un de ces trois sommets augmente le nombre de composantes connexes.



Notons qu'en retirant un sommet de degré 1, nous n'augmentons pas le nombre de composantes connexes. En supprimant un sommet de degré 0, nous le diminuerions d'un.

Définition 4.3.5. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une arête $e \in E$ est un *pont* ou un *isthme* de G si $c(G \setminus e) > c(G)$.

Exemple 4.3.6. Voici un graphe avec deux composantes connexes. Il possède deux isthmes : e et f . Retirer une de ces deux arêtes augmente le nombre de composantes connexes.



Notons qu'en retirant l'arête incidente à un sommet de degré 1, comme e , augmente le nombre de composantes connexes, une telle arête est donc bien un isthme.

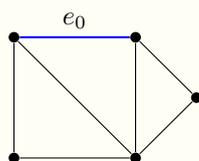
4.4 Les arbres

Rappelons que d'après la [Définition 4.1.11](#), un graphe est connexe si pour toute paire de sommets u et v , il existe un chemin d'extrémités u et v .

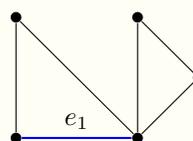
Définition 4.4.1. Un graphe $G = (V, E)$ est *minimalement connexe* si G est connexe, et que pour toute arête $e \in E$, $G \setminus e$ n'est pas connexe.

Ainsi, par la négation, un graphe connexe G qui n'est pas minimalement connexe possède au moins une arête e telle que $G \setminus e$ est connexe.

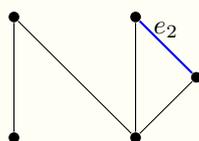
Exemple 4.4.2. En supprimant de façon itérée une telle arête, les graphes obtenus restent connexes, jusqu'à atteindre un graphe minimalement connexe. Tout graphe connexe contient donc un sous-graphe minimalement connexe.



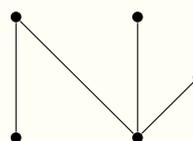
$G_0 = G$



$G_1 = G_0 \setminus e_0$



$G_2 = G_1 \setminus e_1$



$G_3 = G_2 \setminus e_2$

Dans cet exemple, en supprimant successivement e_0 , e_1 et e_2 , nous obtenons un graphe connexe, mais enlever une arête supplémentaire déconnecterait le graphe. G_3 est donc minimalement connexe.

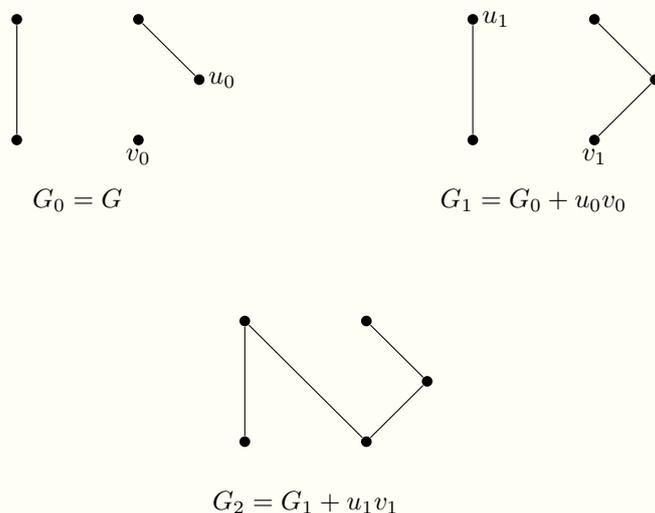
D'après la [Définition 4.2.6](#), un graphe est acyclique s'il ne possède pas de cycle (ou de circuit). Un graphe acyclique est aussi appelé *forêt*.

Proposition 4.4.3. Pour tout graphe acyclique $G = (V, E)$, $|V| - |E| = c(G)$.

Définition 4.4.4. Un graphe $G = (V, E)$ est *maximalement acyclique* si G est acyclique, et que pour toute paire de sommets u et v de G tels que $uv \notin E$, $G + uv$ possède un cycle.

Par la négation, si un graphe acyclique n'est pas maximalement acyclique, c'est qu'il existe au moins une paire de sommets u et v , telle que $G + uv$ est acyclique.

Exemple 4.4.5. En ajoutant de façon itérée des arêtes ne créant pas de cycle tant que possible, nous créons une série de graphes acyclique dont le dernier sera maximalement acyclique. Tout graphe acyclique est donc sous-graphe d'un graphe maximalement acyclique.



Dans cet exemple, nous ajoutons deux arêtes sans créer de cycle, et obtenons le graphe G_2 maximalement acyclique.

Théorème 4.4.6. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Les propositions suivantes sont équivalentes. *

- (i) G est minimalement connexe ;
- (ii) G est maximalement acyclique ;
- (iii) G est connexe et $|E| = |V| - 1$;
- (iv) G est acyclique et $|E| = |V| - 1$;
- (v) G est connexe et acyclique ;
- (vi) pour toute paire de sommets u, v , il existe un unique chemin d'extrémités u et v dans G .

Un graphe vérifiant ces propositions est appelé un *arbre*.

*. Elles sont soit toutes vraies, soit toutes fausses.

Définition 4.4.7. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Un *arbre couvrant* de G est un graphe minimalement connexe (V, F) avec $F \subseteq E$.

Autrement dit, un arbre couvrant de G est un arbre, sous-graphe de G , et contenant tous les sommets de G .

Proposition 4.4.8. Soit G un graphe. G possède un arbre couvrant si et seulement si G est connexe.

l'[Exemple 4.4.2](#) illustre le processus permettant d'obtenir un arbre couvrant de tout graphe connexe.

Chapitre 5

Parité et cycles Eulériens

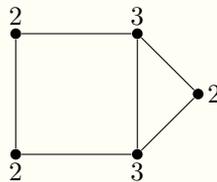
5.1 Parité des degrés

Dans cette section, nous explorons des propriétés liées à la parité des degrés des sommets et des structures comme les coupes et les cycles dans un graphe. Rappelons que pour un graphe $G = (V, E)$, le *degré* d'un sommet $v \in V$, noté $\deg_G(v)$, est le nombre d'arêtes incidentes à v .

Dans ce chapitre, un sommet est dit *impair* si son degré est impair, et *pair* si son degré est pair.

Proposition 5.1.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le nombre de sommets de degré impair dans G est pair.

Exemple 5.1.2. Voici un graphe G avec cinq sommets. Les degrés sont indiqués à côté de chaque sommet.



Ce graphe a deux sommets de degré impair, donc un nombre pair de sommets de degré impair.

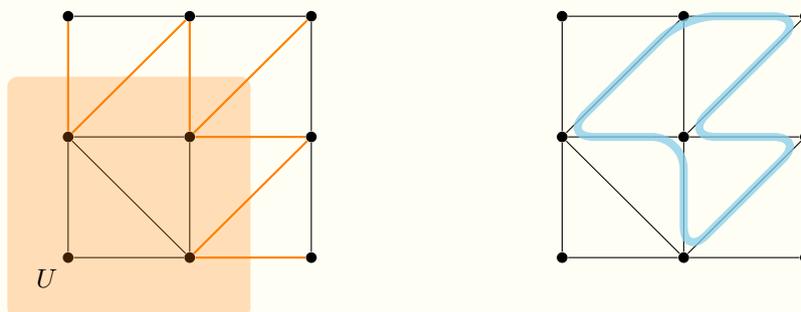
C'est aussi vrai de chaque composante connexe, donc si une composante contient un sommet impair, elle en contient un deuxième. Nous en déduisons :

Proposition 5.1.3. Soit $G = (V, E)$ un graphe arbitraire (pas nécessairement connexe). Pour tout sommet impair $u \in V$, il existe un sommet impair $v \in V \setminus \{u\}$ et un chemin d'extrémités u et v .

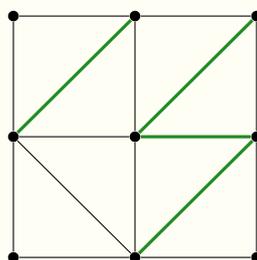
Rappelons que pour un graphe $G = (V, E)$, une coupe $F \subseteq E$ est un ensemble d'arêtes tel qu'il existe $U \subseteq V$ avec $F = \delta_G(U)$, c'est-à-dire F est l'ensemble des arêtes ayant exactement une extrémité dans U .

Proposition 5.1.4. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Soit C un cycle de G et soit $\delta_G(U)$ une coupe de G , avec $U \subseteq V$. Alors le cardinal de l'intersection $E(C) \cap \delta_G(S)$ est pair.

Exemple 5.1.5. Voici un graphe G avec une coupe $\delta_G(U)$ (arêtes oranges) et un cycle (arêtes bleues) :



L'intersection de la coupe et de l'ensemble des arêtes du cycle est l'ensemble d'arêtes verts ci-dessous, qui est de cardinal 4, donc pair.

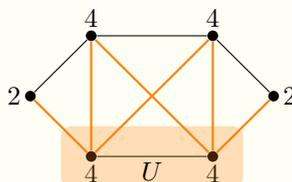


5.2 Graphes de degrés pairs

Définition 5.2.1. Un graphe $G = (V, E)$ est dit *Eulérien* si tous ses sommets ont un degré pair.

Proposition 5.2.2. Soit $G = (V, E)$ un graphe Eulérien. Toute coupe $F = \delta_G(U)$ a un cardinal pair.

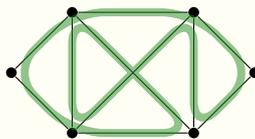
Exemple 5.2.3. Voici un graphe Eulérien G , le degré de chaque nœud étant indiqué :



La coupe $\delta_G(U)$ indiquée en orange est de cardinal 6, qui est pair. De fait toutes les coupes ont un cardinal pair dans ce graphe.

Définition 5.2.4. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un cycle C de G est dit *Eulérien* si $E(C) = E$, autrement dit si C passe une et une seule fois par chaque arête de G .

Exemple 5.2.5. Voici un exemple de cycle Eulérien dans le graphe précédent.



Théorème 5.2.6. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. G est Eulérien si et seulement si G possède un cycle Eulérien.

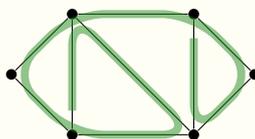
5.3 Chemins Eulériens

Définition 5.3.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un *chemin Eulérien* dans G est un chemin qui passe par chaque arête de G exactement une fois (sans nécessairement revenir au point de départ).

Proposition 5.3.2. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. G possède un chemin Eulérien si et seulement si le nombre de sommets de degré impair dans G est exactement 0 ou 2.

Si G a exactement 2 sommets impairs, alors ses chemins Eulériens auront ces deux sommets comme extrémités. S'il a 0 sommet impair, ses chemins Eulériens sont tous des cycles.

Exemple 5.3.3. Voici un graphe connexe avec deux sommets de degré impair :



Chapitre 6

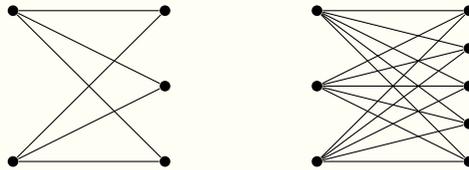
Stables, cliques et colorations

Une coloration d'un graphe consiste en attribuer des couleurs à chaque sommet de sorte que deux sommets adjacents n'aient jamais la même couleur. Les sommets d'une même couleur sont alors deux-à-deux non-adjacents, ils constituent ce que nous appelons un stable.

6.1 Stables et cliques

Définition 6.1.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sous-ensemble $U \subseteq V$ de sommets est un *stable* si pour toute paire u, v de sommets de U , $uv \notin E$.

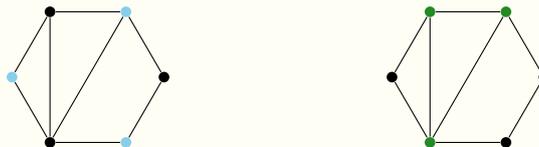
Exemple 6.1.2. Dans un graphe biparti $G = (A, B, E)$, chacune des parties A et B est un stable.



Définition 6.1.3. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sous-ensemble $U \subseteq V$ de sommets est une *clique* si pour toute paire u, v de sommets de U , $uv \in E$.

Autrement dit, les sommets d'un stable sont deux-à-deux non-adjacents, alors que les sommets d'une clique sont deux-à-deux adjacents.

Exemple 6.1.4. Voici un graphe avec un stable de cardinal 3 (en bleu) et une clique de cardinal 3 (en vert).



Rappelons que \overline{G} dénote le graphe complémentaire de G .

Proposition 6.1.5. Soit G un graphe. U est un stable de G si et seulement si U est une clique de \overline{G} .

Notons aussi que par leurs définitions, cliques et stables s'opposent :

Proposition 6.1.6. Soit G un graphe, et soient S un stable et C une clique de G . Alors $|S \cap C| \leq 1$.

6.2 Cliques et stables maximum

En règle général, un sous-ensemble U d'un ensemble X est maximal pour une propriété, si U n'est pas contenu dans un ensemble strictement plus grand de X avec la même propriété. Dans notre contexte, cela donne :

Définition 6.2.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un stable U de G est *maximal* s'il n'existe pas un stable W avec $U \subsetneq W$. Une clique U de G est *maximale* s'il n'existe pas une clique W avec $U \subsetneq W$.

Proposition 6.2.2. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un stable U est maximal si pour tout $v \in V \setminus U$, il existe un voisin de v dans U ($N(v) \cap U \neq \emptyset$). Une clique W est maximale si pour tout $v \in V \setminus W$, il existe un sommet de W qui n'est pas voisin de v ($W \not\subseteq N(v)$).

Il ne faut pas confondre *maximal*, qui fait référence à une relation d'inclusion entre sous-ensembles, et *maximum*, qui fait référence à la cardinalité uniquement.

Définition 6.2.3. Un stable U (respectivement une clique U) est *maximum* s'il n'existe pas de stable (respectivement de clique) ayant une cardinalité strictement plus grande : pour tout stable (respectivement clique) W , $|W| \leq |U|$.

Un stable maximal n'est pas forcément maximum, mais un stable maximum est forcément maximal.

Exemple 6.2.4. Les ensembles de sommets bleus et de sommets verts ci-dessous définissent chacun un stable. Les sommets bleus forment un stable maximum et maximal, car il n'existe pas de stable de cardinal 4 ou plus dans ce graphe. Les sommets verts forment un stable maximal, puisqu'il n'est pas possible d'ajouter un sommet vert supplémentaire de sorte que l'ensemble des sommets verts reste un stable. Par contre les sommets verts ne forment pas un stable maximum, puisque les sommets bleus sont plus nombreux et forment un stable.



Définition 6.2.5. Nous notons $\alpha(G)$ le cardinal des stables maximums de G , et $\omega(G)$ le cardinal des cliques maximums de G .

Il découle des définitions que :

Proposition 6.2.6. Soit G un graphe. Alors $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ et $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.

Un graphe de petit degré maximum aura des stables d'autant plus grand.

Proposition 6.2.7. Soit $G = (V, E)$ un graphe de degré maximum d . Alors $\alpha(G) \geq \frac{|V|}{d+1}$.

6.3 Coloration

Nous donnons deux définitions équivalentes de coloration.

Définition 6.3.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une *coloration* de G en k couleurs est une fonction $\varphi : V \mapsto \{1, 2, \dots, k\}$, associant à chaque sommet un entier appelé *couleur* du sommet, telle que pour toute arête $uv \in E$, $\varphi(u) \neq \varphi(v)$.

Définition 6.3.2. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une *coloration* de G est une partition S_1, S_2, \dots, S_k de V en stables, c'est-à-dire :

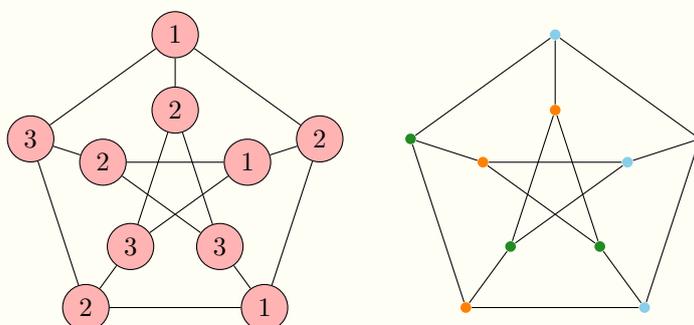
- ▷ S_1, S_2, \dots, S_k sont des stables disjoints ;
- ▷ $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k = V$.

Chaque stable correspond à une *couleur*, k est le *nombre de couleurs* de la coloration.

Les deux définitions sont équivalentes, car il suffit de prendre $S_1 = \varphi^{-1}(1)$, $S_2 = \varphi^{-1}(2)$, ..., $S_k = \varphi^{-1}(k)$ pour obtenir la partition en stable depuis la fonction de coloration. Inversement, depuis une partition en stable, φ peut se définir par : $\varphi(v)$ est l'unique entier $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tel que $v \in S_i$.

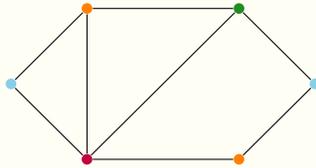
Dans les illustrations, nous préférons utiliser des couleurs plutôt que des entiers attribués à chaque sommet, en choisissant un nombre de couleurs distinctes égal à k .

Exemple 6.3.3. Le graphe de Petersen peut être colorié avec 3 couleurs, comme le montre l'illustration suivante, avec à gauche un indicage entier des couleurs, et à droite l'utilisation de couleurs physiques, où 1 correspond à ●, 2 correspond à ●, et 3 correspond à ●.

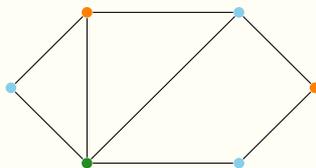


Définition 6.3.4. Soit G un graphe. Le *nombre chromatique* de G est le plus petit entier k tel qu'il existe une coloration de G en k couleurs. Nous le notons $\chi(G)$.

Exemple 6.3.5. Voici un graphe G avec une coloration en 4 couleurs.



Pourtant $\chi(G) = 3$, puisqu'il existe une autre coloration avec seulement 3 couleurs, donnée ci-dessous, mais il n'existe pas de coloration de G en deux couleurs seulement.



Proposition 6.3.6. Soit $G = (V, E)$ un graphe. $\chi(G) = 1$ si et seulement si $E = \emptyset$.

Proposition 6.3.7. Soit $G = (V, E)$ un graphe. $\chi(G) \leq 2$ si et seulement si G est biparti.

Déterminer le nombre chromatique d'un graphe est en général difficile : il n'existe pas de critère simple permettant de systématiquement prouver qu'un graphe n'est pas coloriable avec k couleurs, sauf pour $k = 1$ et $k = 2$. Il existe néanmoins des critères qui peuvent suffire dans des cas particuliers. Par exemple, la présence d'une grande clique oblige à avoir suffisamment de couleurs pour pouvoir attribuer une couleur distincte à chaque sommet de la clique.

Proposition 6.3.8. Pour tout graphe G , $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Exemple 6.3.9. Dans l'Exemple 6.3.5, $\chi(G) = 3$ car G a une coloration en 3 couleurs (donc $\chi(G) \leq 3$, et G possède un triangle, donc $\omega(G) \geq 3$, donc $\chi(G) \geq \omega(G) \geq 3$).

Mais ce n'est pas un critère suffisant :

Proposition 6.3.10. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ non-nul, il existe un graphe G sans triangle (donc $\omega(G) < 3$) tel que $\chi(G) = k$.

Au contraire, les graphes de petit degré sont coloriables avec peu de couleurs.

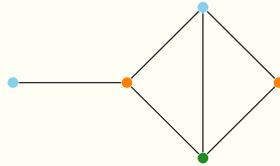
Proposition 6.3.11. Si G est un graphe de degré maximum d , alors $\chi(G) \leq d + 1$.

Nous pouvons raffiner cela, avec la notion de graphe k -dégénéré.

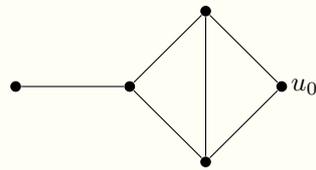
Définition 6.3.12. Un graphe $G = (V, E)$ est k -dégénéré si $E = \emptyset$ ou bien il existe un sommet $u \in V$ tel que $d(u) \leq k$ et $G - u$ est k -dégénéré.

Ainsi, si un graphe est k -dégénéré, nous pouvons itérativement supprimer les sommets, un par un, en supprimant à chaque étape un sommet de degré au plus k . L'ordre de suppression des sommets est appelé un *ordre compatible* de k -dégénérescence.

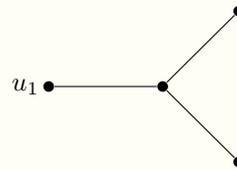
Exemple 6.3.13. Voici un graphe 2-dégénéré et 3-coloriable.



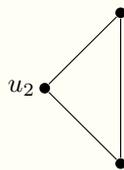
Pour montrer qu'il est dégénéré, nous supprimons itérativement les sommets, en prenant systématiquement un sommet de degré au plus 2.



$G_0 = G$



$G_1 = G \setminus u_0$



$G_2 = G_1 \setminus u_1$



$G_3 = G_2 \setminus u_2$

avec $G_4 = G_3 \setminus u_3$ qui a un seul sommet, et n'a donc pas d'arête. L'ordre compatible est u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 .

Proposition 6.3.14. Pour tout graphe k -dégénéré G , $\chi(G) \leq k + 1$.