

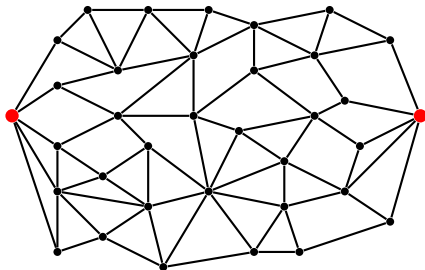
ROUTAGES OPTIMAUX : TOURS, FLOTS ET CHEMINS

Guyslain Naves
encadré par András Sebő
et un peu par Vincent Jost

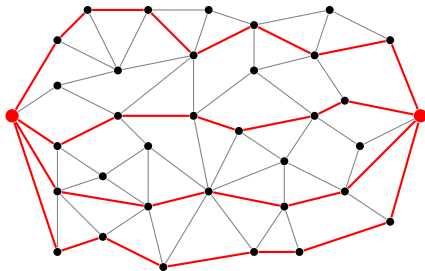
11 janvier 2010

Université de Grenoble

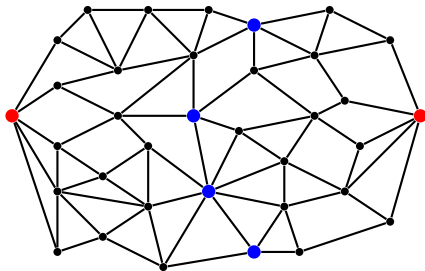
Milady et le cardinal



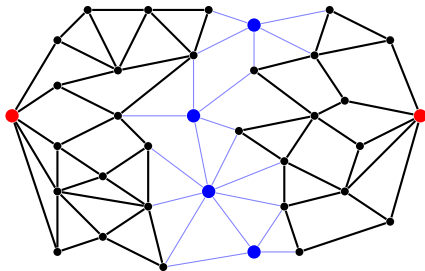
Milady et le cardinal



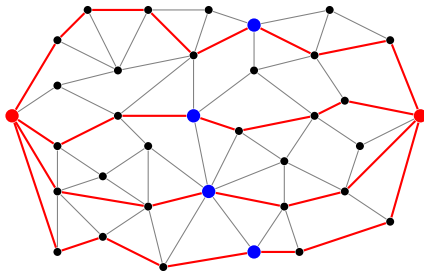
Milady et le cardinal



Milady et le cardinal



Milady et le cardinal



Deux points de vue...

Problème (Milady)

Étant donné un graphe et deux sommets, trouver un maximum de chemins sommet-disjoints entre ces deux sommets.

Problème (Les mousquetaires)

Étant donné un graphe et deux sommets, trouver un ensemble de cardinalité minimum, bloquant tous les chemins entre ces deux sommets.

$$\max \text{Milady} \leq \min \text{mousquetaires}$$

... une réponse commune.

Théorème (Menger, 1927)

Le nombre *maximum de chemins sommet-disjoints* entre deux sommets est égal à la cardinalité *minimum d'un ensemble séparant* les deux sommets.

... une réponse commune.

Théorème (Menger, 1927)

Le nombre *maximum de chemins sommet-disjoints* entre deux sommets est égal à la cardinalité *minimum d'un ensemble séparant* les deux sommets.

Interêt :

Les deux solutions s'entre-justifient !
Ce sont des certificats d'optimalité.

Programmation linéaire entière

Idee : encoder les problèmes par des inéquations linéaires.

- $\mathcal{P}$ ensemble des chemins entre Milady et le cardinal.

Programmation linéaire entière

Idée : encoder les problèmes par des inéquations linéaires.

- $\mathcal{P}$ ensemble des chemins entre Milady et le cardinal.
- V ensemble des sommets.

Programmation linéaire entière

Idée : encoder les problèmes par des inéquations linéaires.

- $\mathcal{P}$ ensemble des chemins entre Milady et le cardinal.
- V ensemble des sommets.
- Trouver $x : \mathcal{P} \rightarrow \{0, 1\}$, tel que pour tout $v \in V \setminus \{s, t\}$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}, v \in P} x_P \leq 1$$

Programmation linéaire entière

Idée : encoder les problèmes par des inéquations linéaires.

- $\mathcal{P}$ ensemble des chemins entre Milady et le cardinal.
- V ensemble des sommets.
- Trouver $x : \mathcal{P} \rightarrow \{0, 1\}$, tel que pour tout $v \in V \setminus \{s, t\}$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}, v \in P} x_P \leq 1$$

- Trouver $y : V \setminus \{s, t\} \rightarrow \{0, 1\}$ tel que pour tout $P \in \mathcal{P}$

$$\sum_{v \in P} y_v \geq 1$$

De la dualité

$$\begin{aligned} \min \sum_{v \in V} y_v \\ \sum_{v \in P} y_v &\geq 1 \quad (\forall P) \\ y_v &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \\ \sum_{P \in \mathcal{P}, v \in P} x_P &\leq 1 \quad (\forall v) \\ x_P &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

De la dualité

$$\begin{aligned} \min \sum_{v \in V} y_v \\ \sum_{v \in P} y_v &\geq 1 \quad (\forall P) \\ y_v &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \\ \sum_{P \in \mathcal{P}, v \in P} x_P &\leq 1 \quad (\forall v) \\ x_P &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

- Transformation variable $\Leftrightarrow$ contrainte,
- Problème **primal** et **problème dual**,

De la dualité

$$\begin{aligned} \min \sum_{v \in V} y_v \\ \sum_{v \in P} y_v \geq 1 \quad (\forall P) \\ y_v \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \\ \sum_{P \in \mathcal{P}, v \in P} x_P \leq 1 \quad (\forall v) \\ x_P \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

- Transformation variable $\Leftrightarrow$ contrainte,
- Problème **primal** et **problème dual**,
- **Minimum primal** $\geq$ **maximum dual**,

De la dualité

$$\begin{aligned} \min \sum_{v \in V} y_v \\ \sum_{v \in P} y_v &\geq 1 \ (\forall P) \\ y_v &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \\ \sum_{P \in \mathcal{P}, v \in P} x_P &\leq 1 \ (\forall v) \\ x_P &\geq 0 \end{aligned}$$

- Transformation variable $\Leftrightarrow$ contrainte,
- Problème **primal** et **problème dual**,
- **Minimum primal** $\geq$ **maximum dual**,
- Dans $\mathbb{R}$, égalité primal-dual,

De la dualité

$$\begin{aligned} \min \sum_{v \in V} w_v y_v \\ \sum_{v \in P} y_v &\geq 1 \quad (\forall P) \\ y_v &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \\ \sum_{P \in \mathcal{P}, v \in P} x_P &\leq w_v \quad (\forall v) \\ x_P &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

- Transformation variable $\Leftrightarrow$ contrainte,
- Problème **primal** et **problème dual**,
- **Minimum primal** $\geq$ **maximum dual**,
- Dans $\mathbb{R}$, égalité primal-dual,

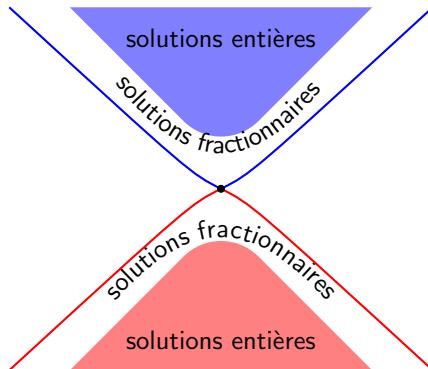
De la dualité

$$\begin{aligned} \min \sum_{v \in V} w_v y_v \\ \sum_{v \in P} y_v &\geq 1 \quad (\forall P) \\ y_v &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

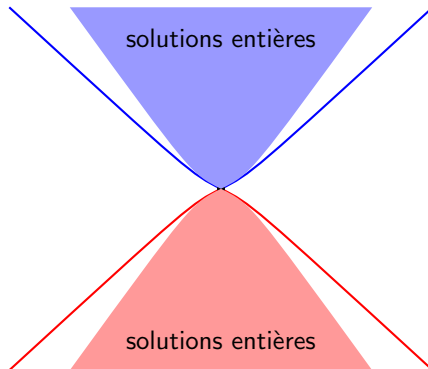
$$\begin{aligned} \max \sum_{P \in \mathcal{P}} x_P \\ \sum_{P \in \mathcal{P}, v \in P} x_P &\leq w_v \quad (\forall v) \\ x_P &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

- Transformation variable $\Leftrightarrow$ contrainte,
- Problème **primal** et **problème dual**,
- **Minimum primal** $\geq$ **maximum dual**,
- Dans $\mathbb{R}$, égalité primal-dual,
- *TDI* : égalité entière pour tout $w \in \mathbb{N}^V$.

Ce que nous cherchons



Ce que nous cherchons



Qu'est-ce qu'un problème difficile ?

Qu'est-ce qu'un problème difficile ?

- Il n'existe pas de certificat *simple* de non-existence (ou d'optimalité) de solution (pas dans co-NP, sauf si $\text{co-NP} = \text{NP}$).

Qu'est-ce qu'un problème difficile ?

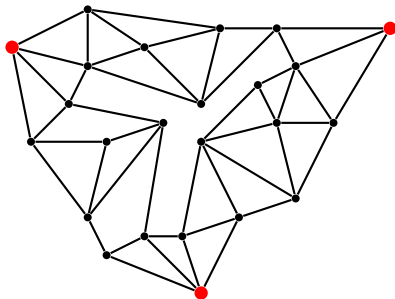
- Il n'existe pas de certificat *simple* de non-existence (ou d'optimalité) de solution (pas dans co-NP, sauf si $\text{co-NP} = \text{NP}$).
- Si je sais résoudre le problème en question, je sais résoudre d'autres problèmes réputés difficiles (*NP-difficile*).

Au programme

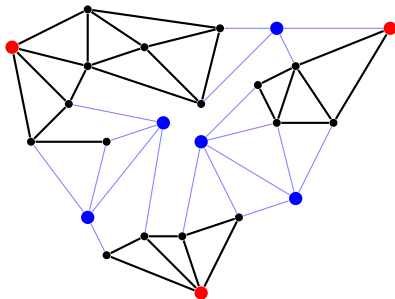
- ① Coupes multiterminales,
- ② Tours graphiques et ensembles éclatants,
- ③ Multiflot entier.

Coupes multiterminales

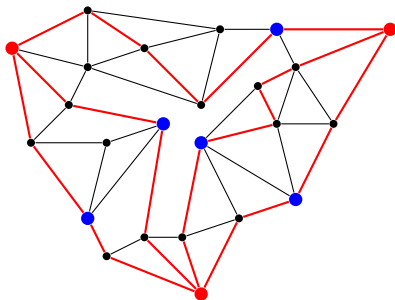
L'entrevue



L'entrevue



L'entrevue



Encore deux problèmes...

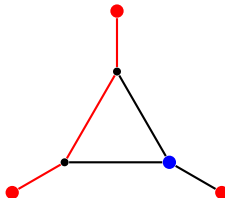
Problème (Mousquetaires)

Étant donné un graphe, et T sommets, trouver un ensemble de sommets de cardinalité minimum, bloquant tous les chemins d'extrémités dans T .

Problème (T -chemins disjoints)

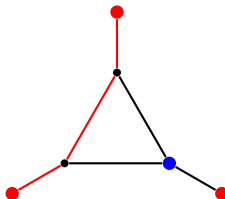
Étant donné un graphe, et T un stable, trouver un nombre maximum de chemins internement sommet-disjoints, dont les extrémités sont dans T .

... mais pas de théorème.



Il faut 2 mousquetaires !

... mais pas de théorème.



Il faut 2 mousquetaires !

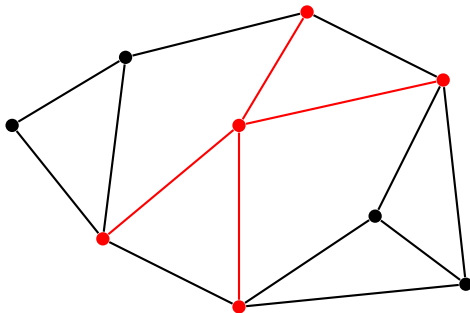
Théorème (Mader, 1978)

Le nombre maximum de S -chemins sommet-disjoints possède une bonne caractérisation.

Mineurs par sommets

Deux opérations :

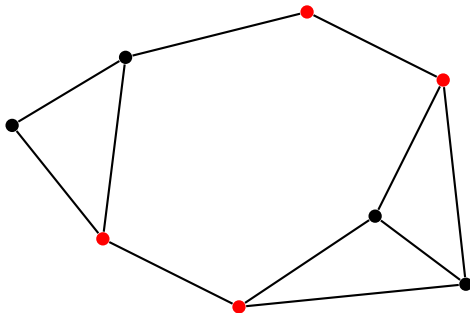
- *suppression de sommet*,
- *contraction de sommet*,



Mineurs par sommets

Deux opérations :

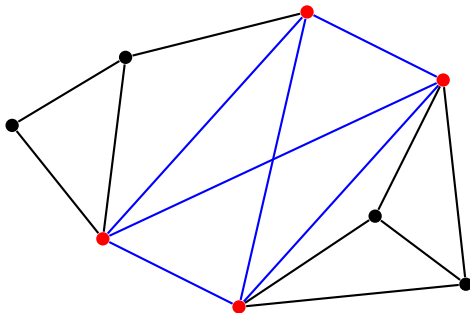
- *suppression de sommet*,
- *contraction de sommet*,



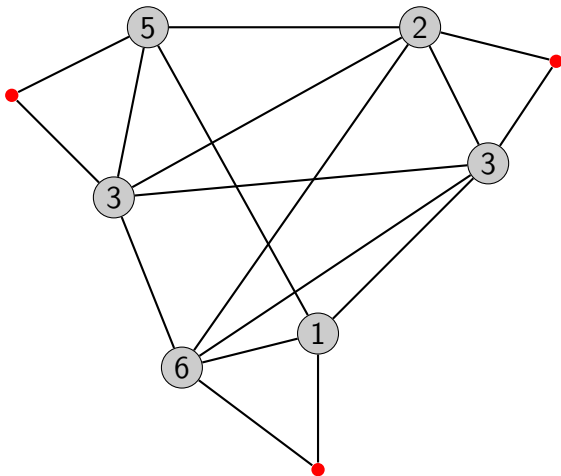
Mineurs par sommets

Deux opérations :

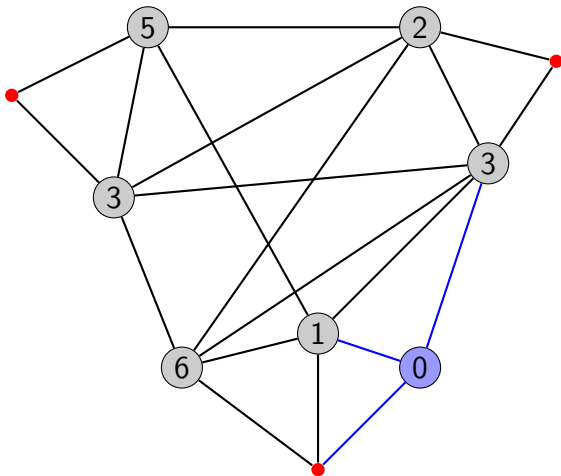
- *suppression de sommet*,
- *contraction de sommet*,



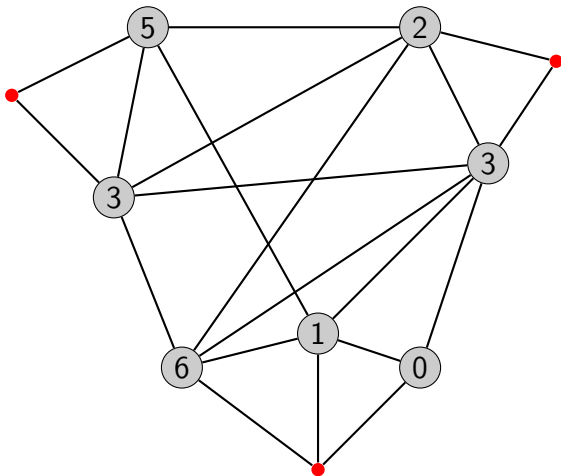
De l'intérêt des mineurs



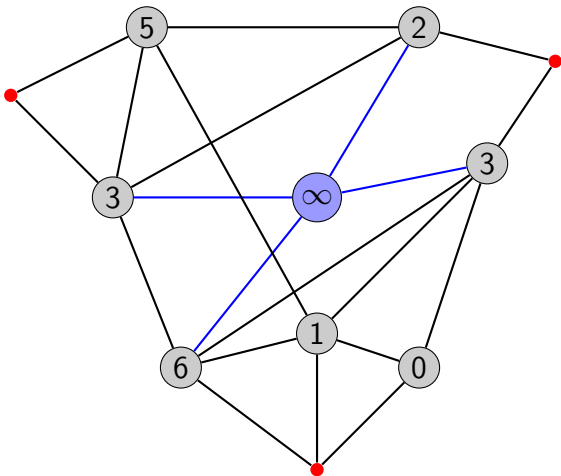
De l'intérêt des mineurs



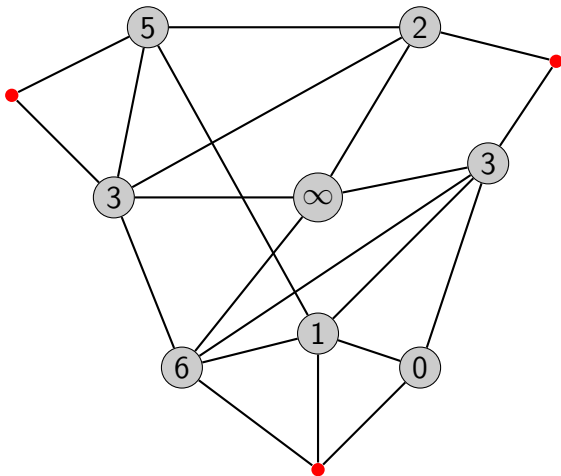
De l'intérêt des mineurs



De l'intérêt des mineurs



De l'intérêt des mineurs



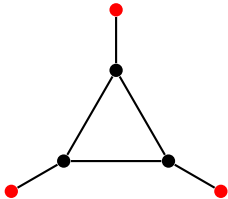
Proposition

La classe des graphes pour lesquels le système :

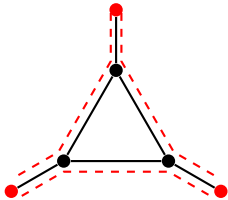
$$x(P) \geq 1 \quad \text{pour tout } T\text{-chemin } P$$

est TDI est fermé par mineurs de sommets.

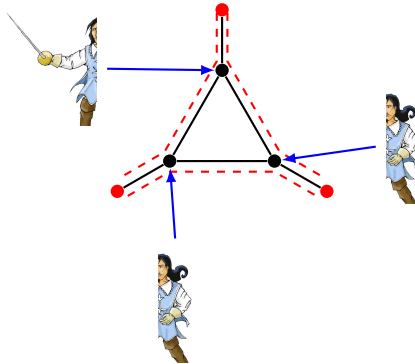
Mauvais graphes



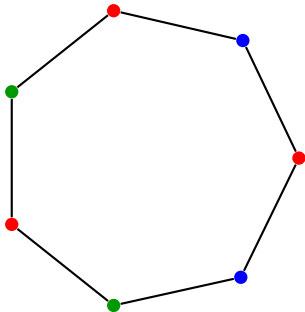
Mauvais graphes



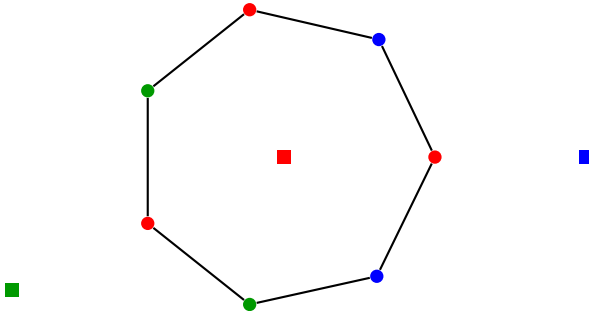
Mauvais graphes



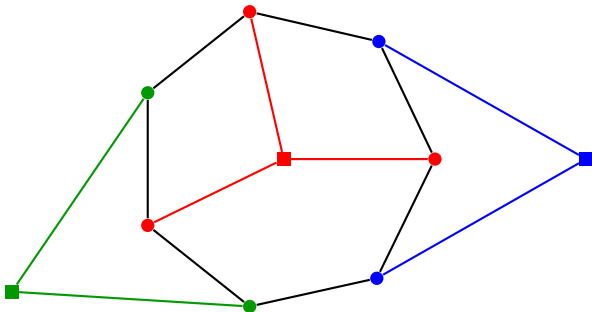
Mauvais graphes



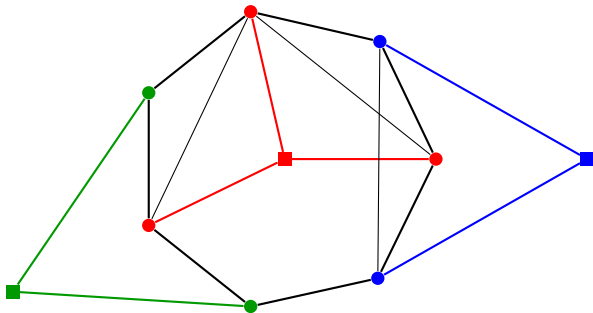
Mauvais graphes



Mauvais graphes



Mauvais graphes



Théorème

Soit G un graphe. Exactement l'un des deux est vrai :

- $x(P) \geq 1$ pour tout T -chemin est TDI pour tout stable T ,
- G possède un mauvais graphe comme mineur par sommet.

Théorème

Soit G un graphe. Exactement l'un des deux est vrai :

- *$x(P) \geq 1$ pour tout T -chemin est TDI pour tout stable T ,*
- *G possède un mauvais graphe comme mineur par sommet.*

Famille de graphes infinie à exclure...

Théorème

Soit G un graphe. Exactement l'un des deux est vrai :

- *$x(P) \geq 1$ pour tout T -chemin est TDI pour tout stable T ,*
- *G possède un mauvais graphe comme mineur par sommet.*

Famille de graphes infinie à exclure...
mais seulement avec des stables de taille 3!

Théorème

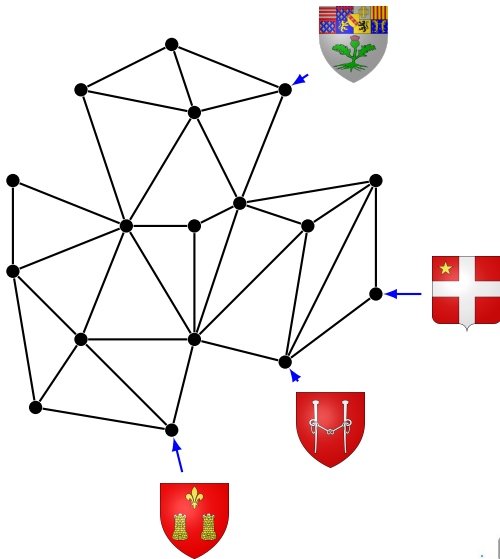
Soit G un graphe. Exactement l'un des deux est vrai :

- *$x(P) \geq 1$ pour tout T -chemin est TDI pour tout stable T ,*
- *G possède un mauvais graphe comme mineur par sommet.*

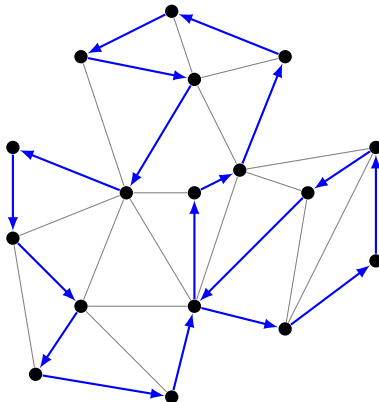
Famille de graphes infinie à exclure...
mais seulement avec des stables de taille 3!
TDI pour les graphes sans-TA.

Tours graphiques et ensembles éclatants

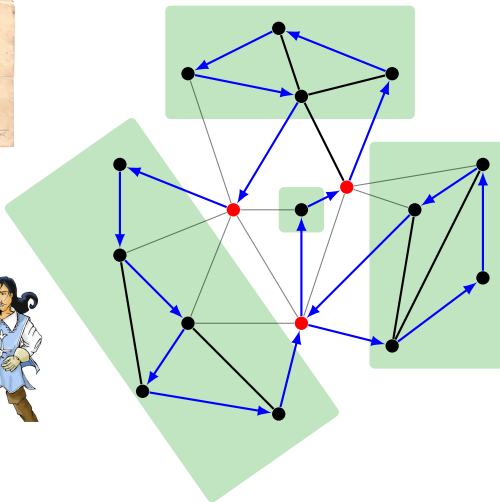
Le courrier du roi



Le courrier du roi



Le courrier du roi



Deux problèmes ?

Soit $c(U)$ le nombre de composantes connexes de $G - U$.
Ensemble éclatant : U avec $c(U) > |U|$.

Problème (Plus court tour)

Étant donné un graphe, trouver un plus court tour de ses sommets.

Problème

Étant donné un graphe, trouver un ensemble éclatant s'il en existe.

Solidité t d'un graphe G :

minimum de $\frac{|U|}{c(U)}$ avec $c(U) \geq 2$.

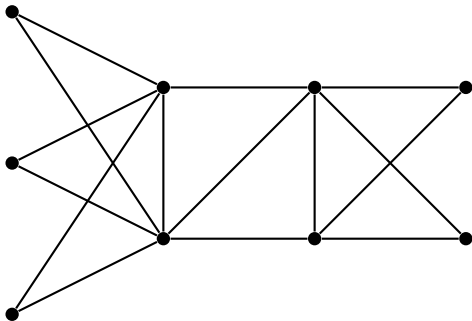
Notion introduite par Chvátal (1973)

Conjecture :

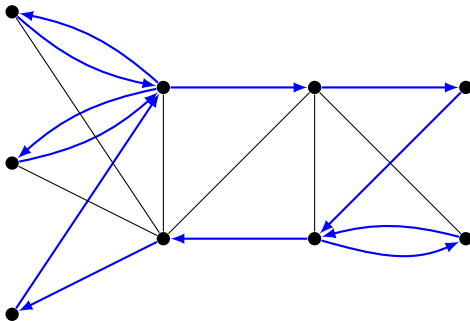
Il existe t_0 tel que tout graphe de solidité t_0 est hamiltonien.

Si t_0 existe, $t_0 \geq \frac{9}{4}$.

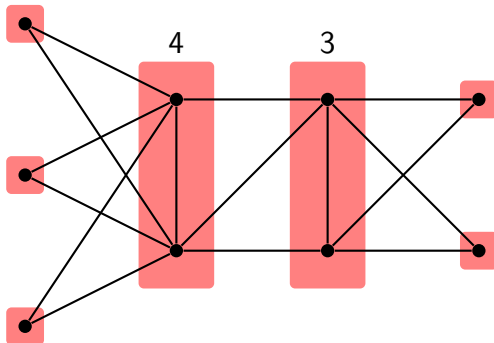
Pas si simple.



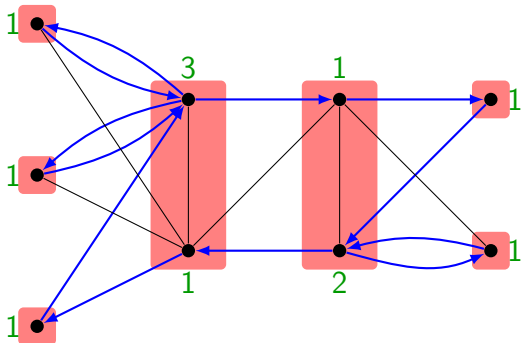
Pas si simple.



Pas si simple.



Pas si simple.



Trois problèmes !

Problème (Partition maximum)

Trouver une partition $\mathcal{P}$ des sommets maximisant :

$$\sum_{U \in \mathcal{P}} c(U)$$

Problème (Couverture minimum)

Trouver un vecteur entier $x : V \rightarrow \mathbb{N}$ tel que :

$$x(U) \geq c(U) \quad (\text{pour tout } U \subset V)$$

Trois problèmes !

Problème (Partition maximum)

Trouver une partition $\mathcal{P}$ des sommets maximisant :

$$\sum_{U \in \mathcal{P}} c(U)$$

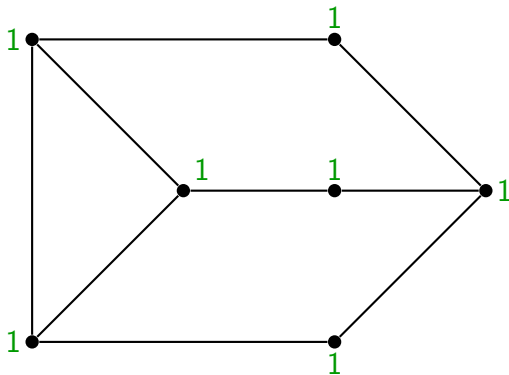
Problème (Couverture minimum)

Trouver un vecteur entier $x : V \rightarrow \mathbb{N}$ tel que :

$$x(U) \geq c(U) \quad (\text{pour tout } U \subset V)$$

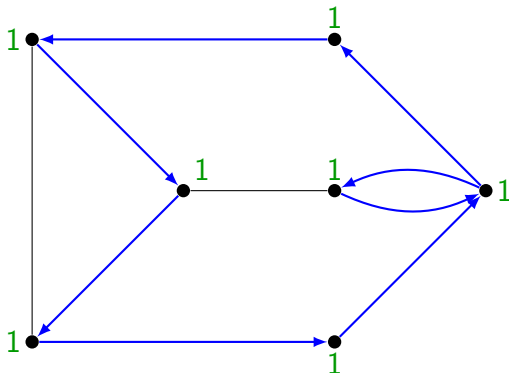
Longueur tour $\geq$ x minimum $\geq$ partition maximum

couverture $\neq$ tour



Couverture minimum : 7

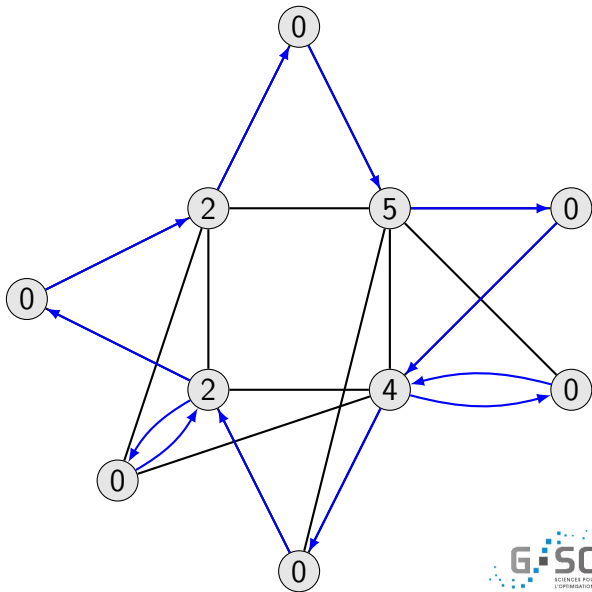
couverture $\neq$ tour



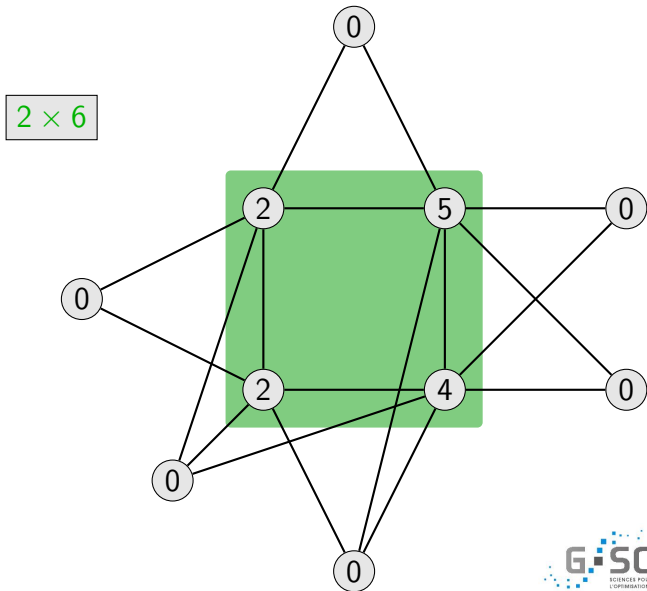
Couverture minimum : 7

Tour le plus court : 8

Un exemple pondéré

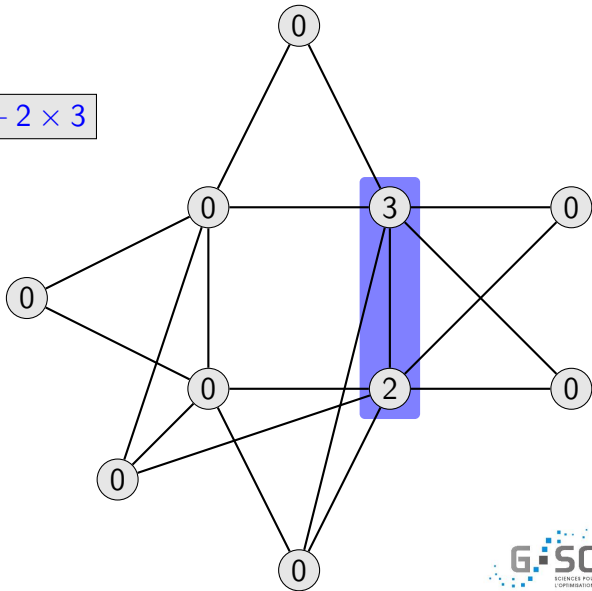


Un exemple pondéré



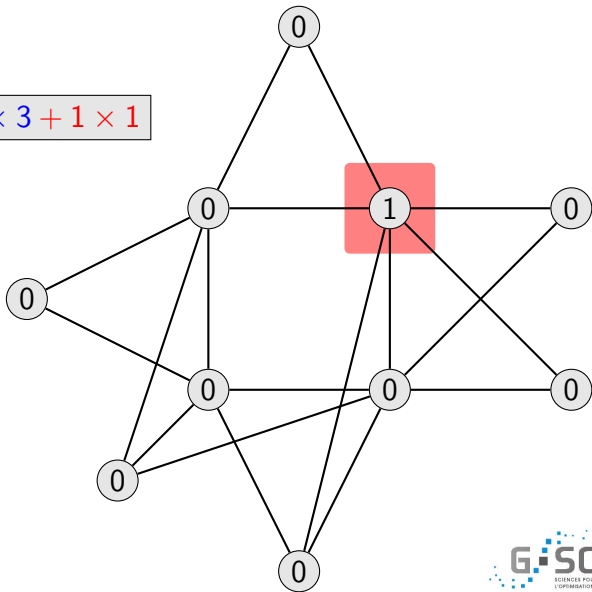
Un exemple pondéré

$$2 \times 6 + 2 \times 3$$



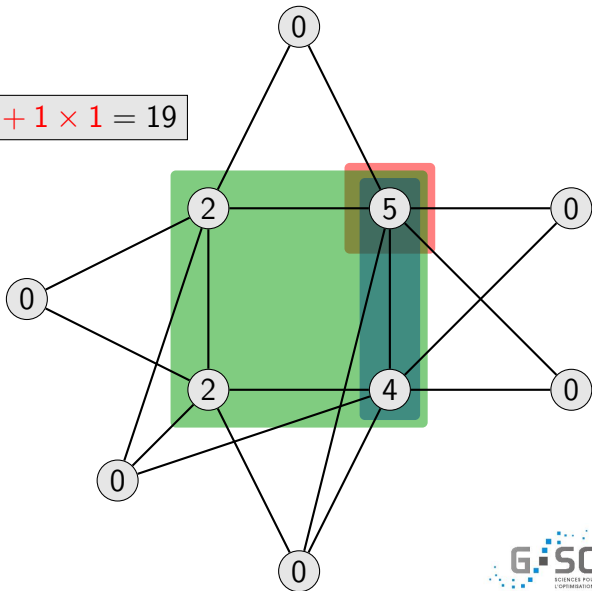
Un exemple pondéré

$$2 \times 6 + 2 \times 3 + 1 \times 1$$

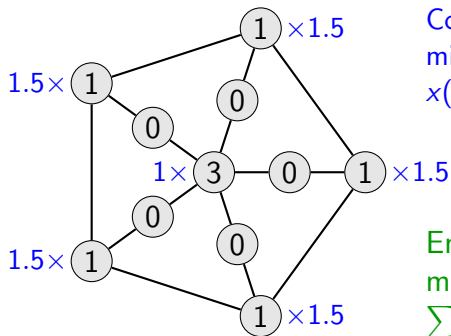


Un exemple pondéré

$$2 \times 6 + 2 \times 3 + 1 \times 1 = 19$$



couverture $\neq$ empilement



Couverture :

$$\begin{aligned} \min \quad & wx \\ x(U) &\geq c(U) \quad (U \subseteq V) \end{aligned}$$

Empilement :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{U \subseteq V} y_U c(U) \\ \sum_{U \ni v} y_U &= w_v \quad (v \in V) \end{aligned}$$

$$\text{Empilement : } 5 \times \frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{2} \times 1 = 10.5$$

$$\text{Couverture : } 5 \times 1.5 + 3 = 10.5$$

Objectif

Trouver des classes de graphes pour lesquelles :
Tour min = **Couverture min** = **Empilement max**

Objectif

Trouver des classes de graphes pour lesquelles :
Tour min = **Couverture min** = **Empilement max**

Théorème

Les arbres, c'est bon.

Objectif

Trouver des classes de graphes pour lesquelles :
Tour min = **Couverture min** = **Empilement max**

Théorème

Les arbres, c'est bon.

Théorème

Les cographes, c'est bon.

Les graphes d'intervalles

Graphe d'intervalles : graphe d'intersection d'intervalles de la droite des réels.

Théorème

*Dans les graphes d'intervalles, la cardinalité d'un **plus court tour** est égale à la **valeur maximum d'une partition en ensembles éclatants**.*

Les graphes d'intervalles

Graphe d'intervalles : graphe d'intersection d'intervalles de la droite des réels.

Théorème

*Dans les graphes d'intervalles, la cardinalité d'un **plus court tour** est égale à la **valeur maximum d'une partition en ensembles éclatants**.*

Et avec des poids ?

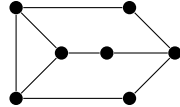
Il suffirait de montrer que $x(U) \geq c(U)$ est TDI.

Graphes de co-comparabilité : graphes complémentaires des graphes transitivement orientables.

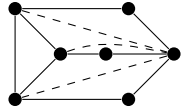
Graphes sans-TA : graphes tels que pour tout triplet de sommets, l'un des sommets et son voisinage séparent les deux autres.

Pas de contre-exemple

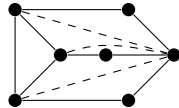
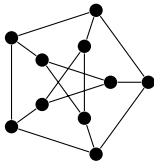
Les vilains



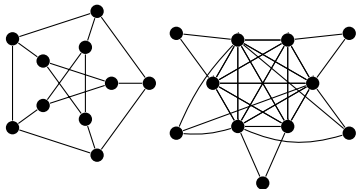
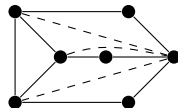
Les vilains



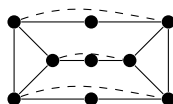
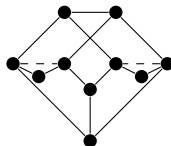
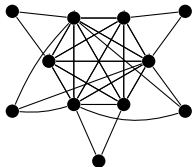
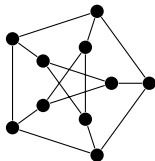
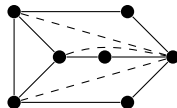
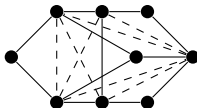
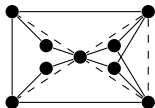
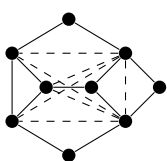
Les vilains



Les vilains

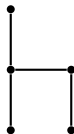


Les vilains



Théorème

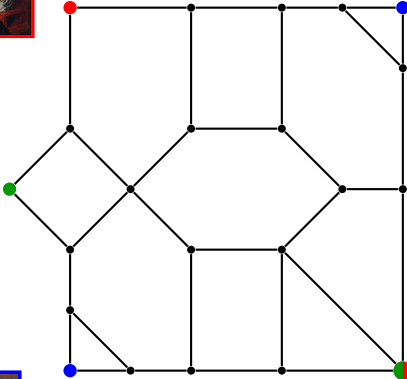
Le système $x(U) \geq c(U)$ (pour tout U) est TDI pour les graphes sans chaise.



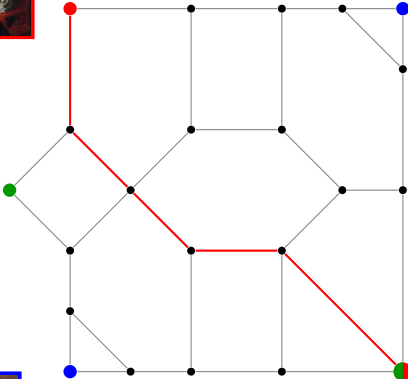
Ne prouve pas : *plus court tour* = *empilement maximum* !

Multiflots entiers.

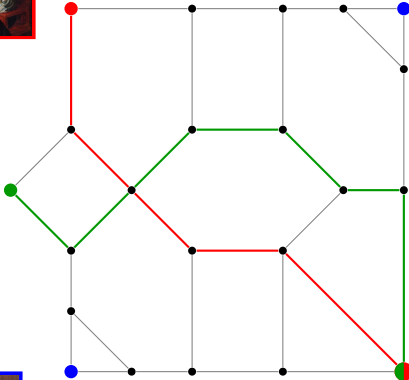
La reine, le roi et le duc



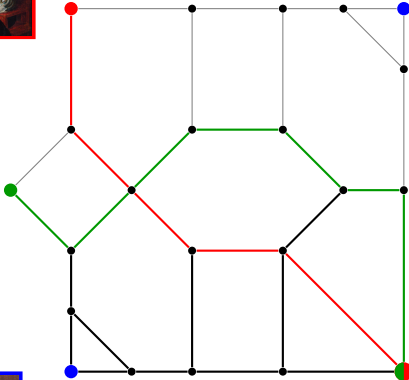
La reine, le roi et le duc



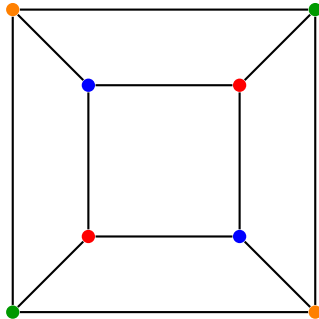
La reine, le roi et le duc



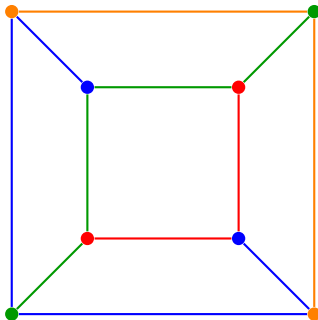
La reine, le roi et le duc



Un exemple avec solution



Un exemple avec solution



Problème (multiflot entier)

Étant donné un graphe G et des commodités H , décider s'il existe un chemin pour chaque commodité, tels que les chemins choisis soient arête-disjoints deux-à-deux.

Problème difficile !

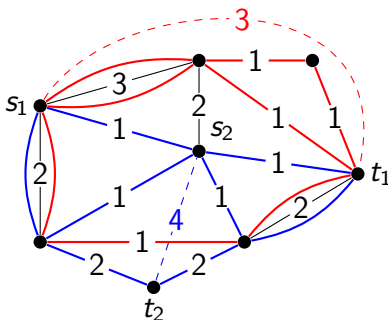
De multiples paramètres.

Puisque c'est dur, regardons des cas particuliers.

- planarité du graphe,
- nombre de commodités,
- orienté ou non-orienté,
- acyclicité,
- parité des degrés,
- fonction de capacité,
- ...

Capacités

- $c : E(G + H) \rightarrow \mathbb{N}$,
- $c(e)$ pour $e \in E(G)$: nombre maximum de chemins pouvant utiliser e ,
- $c(h)$ pour $h \in E(H)$: nombre de chemins demandés pour la commodité h .



Cas G quelconque

		orienté			orienté acyclique			non-orienté		
		arc-d		som-d	arc-d		som-d	arête-d		som-d
$ E(H) $	r		euler			euler			euler	
arb	bin									
	un									
fixe	bin						FHW			RS
	un					V				
	fixe									
2	bin		NW	FHW					RW	
	un				EIS			EIS		
	fix									
	2									

Cas G planaire

		orienté			orienté acyclique			non-orienté		
		arc-d		som-d	arc-d		som-d	arête-d		som-d
$ E(H) $	r		euler			euler			euler	
arb	bin									
	un					Ma				
fixe	bin									
	un			S		N				
	fixe									
2	bin									
	un	Mu			N			N		
	fix									
	2									

Cas $G + H$ planaire

		orienté			orienté acyclique			non-orienté		
		arc-d		som-d	arc-d		som-d	arête-d		som-d
$ E(H) $	r		euler			euler			euler	
arb	bin				LY				Sey	
	un							MP		
fixe	bin							Sebö		
	un									
	fixe									
2	bin									
	un	N								
	fix									
	2									

Théorème

Le problème de multiflot entier avec G graphe non-orienté planaire et $|E(H)| = 2$ est NP-complet.

Le problème de multiflot entier avec $G + H$ graphe orienté planaire et $|E(H)| = 2$ est NP-complet.

Le problème de multiflot entier avec G graphe orienté acyclique planaire et $|E(H)| = 2$ est NP-complet.

Dernier problème

Problème (Multiflot dans les graphes eulériens)

Chemins arc-disjoints, sous la condition que dans $G + H$, la capacité entrante de tout sommet est égal à sa capacité sortante.

Remarque :

Si $|E(H)| = 1$ (flot dans les graphes eulériens), ce problème est constant, il existe toujours un flot.

Si $|E(H)| = 2$, il est polynomial (Nash-Williams, Frank).

Si $|E(H)| \geq 3$, c'est NP-complet, même avec G acyclique (Vygen).

Cas G planaire acyclique

Théorème (Pfeiffer, Marx)

Si G est planaire acyclique, MULTIFLOT DANS LES GRAPHS EULÉRIENS est NP-complet

Théorème (Ibaraki et Nagamochi)

Si G est planaire acyclique, que toutes les destinations des arcs de demande sont sur le bord d'une même face de G et qu'il existe un bon ordre d'élimination des sommets, MULTIFLOT DANS LES GRAPHS EULÉRIENS est polynomial.

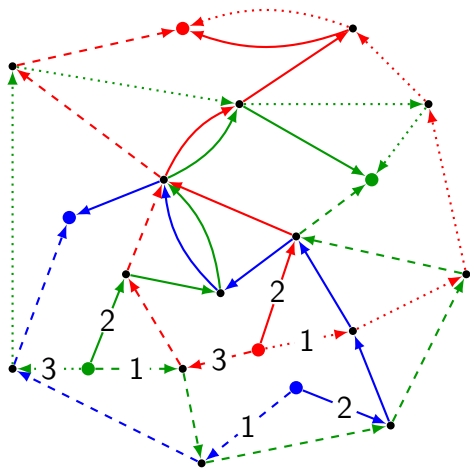
Théorème

Si G est planaire acyclique, et $|E(H)|$ est fixé, MULTIFLOT DANS LES GRAPHS EULÉRIENS est pseudopolynomial.

Preuve :

- Décroiser les chemins,
- Étudier la structure des chemins (indépendant de G),
- Router localement en chaque sommet.

Exemple

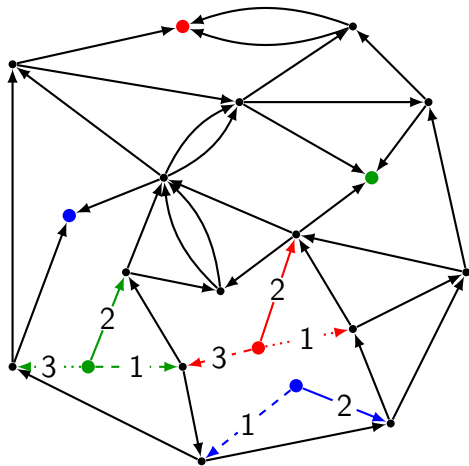


$$BR = \begin{pmatrix} - & - & - \\ C & C & C \end{pmatrix}$$

$$VR = \begin{pmatrix} C & GD & DD \\ - & C & C \\ DD & C & C \end{pmatrix}$$

$$BV = \begin{pmatrix} C & - & C \\ DG & C & - \end{pmatrix}$$

Exemple

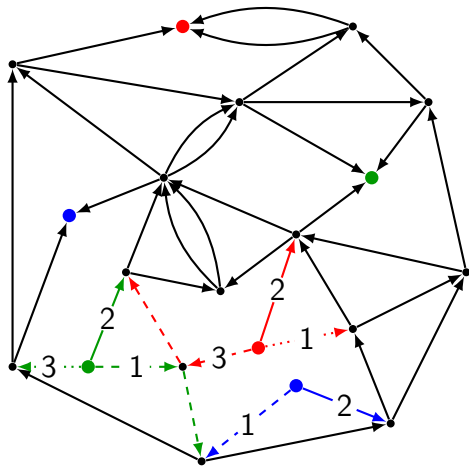


$$BR = \begin{pmatrix} - & - & - \\ C & C & C \end{pmatrix}$$

$$VR = \begin{pmatrix} C & GD & DD \\ - & C & C \\ DD & C & C \end{pmatrix}$$

$$BV = \begin{pmatrix} C & - & C \\ DG & C & - \end{pmatrix}$$

Exemple

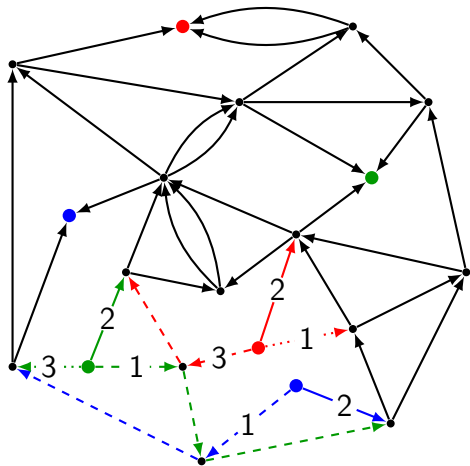


$$BR = \begin{pmatrix} - & - & - \\ C & C & C \end{pmatrix}$$

$$VR = \begin{pmatrix} C & GD & DD \\ - & C & C \\ DD & C & C \end{pmatrix}$$

$$BV = \begin{pmatrix} C & - & C \\ DG & C & - \end{pmatrix}$$

Exemple

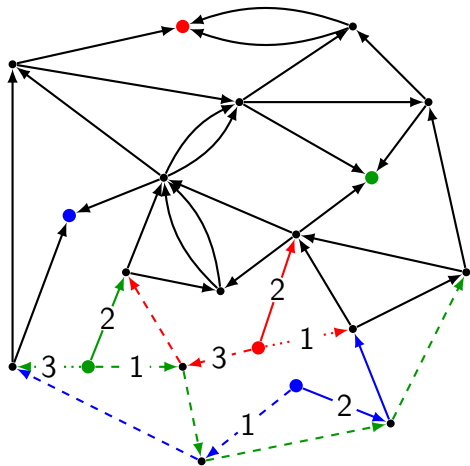


$$BR = \begin{pmatrix} - & - & - \\ C & C & C \end{pmatrix}$$

$$VR = \begin{pmatrix} C & GD & DD \\ - & C & C \\ DD & C & C \end{pmatrix}$$

$$BV = \begin{pmatrix} C & - & C \\ DG & C & - \end{pmatrix}$$

Exemple

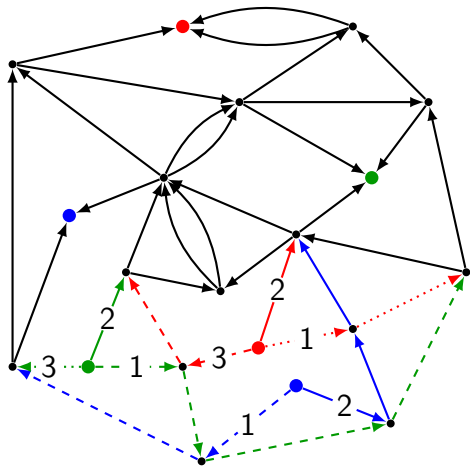


$$BR = \begin{pmatrix} - & - & - \\ C & C & C \end{pmatrix}$$

$$VR = \begin{pmatrix} C & GD & DD \\ - & C & C \\ DD & C & C \end{pmatrix}$$

$$BV = \begin{pmatrix} C & - & C \\ DG & C & - \end{pmatrix}$$

Exemple

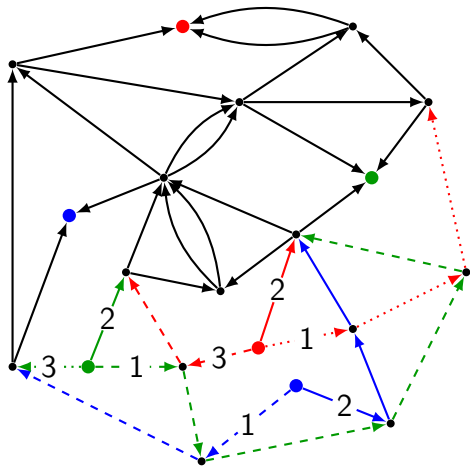


$$BR = \begin{pmatrix} - & - & - \\ C & C & C \end{pmatrix}$$

$$VR = \begin{pmatrix} C & GD & DD \\ - & C & C \\ DD & C & C \end{pmatrix}$$

$$BV = \begin{pmatrix} C & - & C \\ DG & C & - \end{pmatrix}$$

Exemple

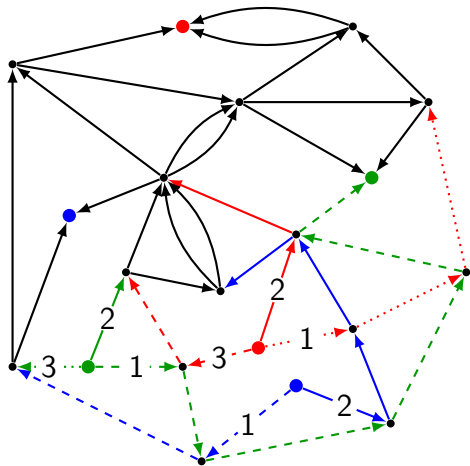


$$BR = \begin{pmatrix} - & - & - \\ C & C & C \end{pmatrix}$$

$$VR = \begin{pmatrix} C & GD & DD \\ - & C & C \\ DD & C & C \end{pmatrix}$$

$$BV = \begin{pmatrix} C & - & C \\ DG & C & - \end{pmatrix}$$

Exemple

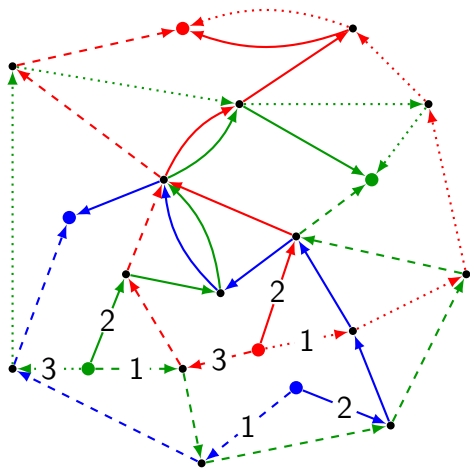


$$BR = \begin{pmatrix} - & - & - \\ C & C & C \end{pmatrix}$$

$$VR = \begin{pmatrix} C & GD & DD \\ - & C & C \\ DD & C & C \end{pmatrix}$$

$$BV = \begin{pmatrix} C & - & C \\ DG & C & - \end{pmatrix}$$

Exemple

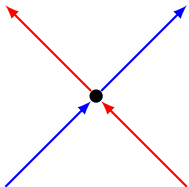


$$BR = \begin{pmatrix} - & - & - \\ C & C & C \end{pmatrix}$$

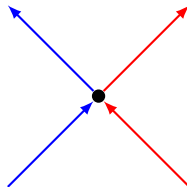
$$VR = \begin{pmatrix} C & GD & DD \\ - & C & C \\ DD & C & C \end{pmatrix}$$

$$BV = \begin{pmatrix} C & - & C \\ DG & C & - \end{pmatrix}$$

Décroisement

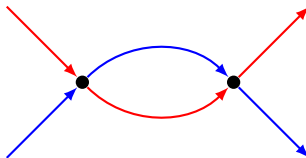


Croisés.

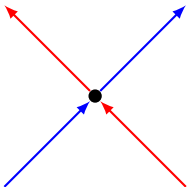


Pas croisés.

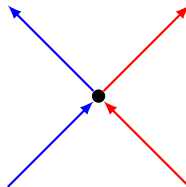
Décroisement : deux chemins se croisent au plus une fois.



Décroisement

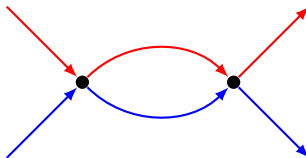


Croisés.



Pas croisés.

Décroisement : deux chemins se croisent au plus une fois.



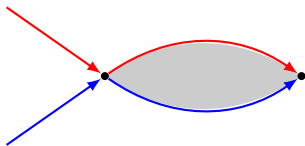
Plus exactement :

Proposition

S'il existe une solution, il existe une solution telle que, si deux chemins sont croisés, ils se croisent uniquement en leur premier sommet commun, et leurs terminaux sont distincts.

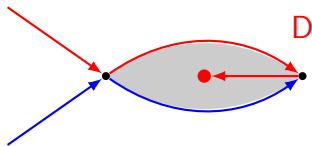
Preuve : Décroisement successifs des chemins, terminaison par décroissance lexicographique des nombres de croisement en chaque sommet.

Deuxième intersection



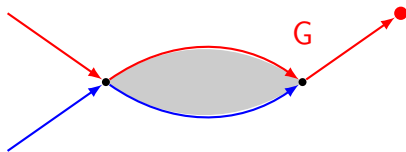
- Pas de croisement possible.
- Cycle formé par les chemins.
- Position des terminaux déterminante.

Deuxième intersection



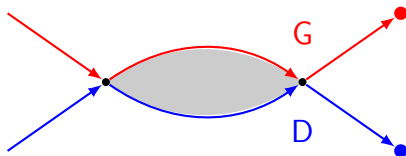
- Pas de croisement possible.
- Cycle formé par les chemins.
- Position des terminaux déterminante.

Deuxième intersection



- Pas de croisement possible.
- Cycle formé par les chemins.
- Position des terminaux déterminante.

Deuxième intersection



- Pas de croisement possible.
- Cycle formé par les chemins.
- Position des terminaux déterminante.

Il suffit de déterminer la première intersection !

Proposition

Pour un arc de demande h et un chemin P d'une autre demande, l'ensemble des chemins pour h passant à droite de (resp. passant à gauche de, croisant) P en leur première intersection est consécutif.

Consécutif = consécutif autour de leur sommet d'origine.

Remarque : $O((\max_{h \in E(H)} c(h))^{3|E(H)|^2})$ possibilités.

- 1 Deviner les comportements relatifs des chemins.
- 2 Router chaque sommet par ordre croissant.

Complexité : $O(f(C)^{|E(H)|^2} n)$, avec $C = \max_{h \in E(H)} c(h)$ et f fonction polynomiale.

1 Coupes multiterminales

- caractérisation simple,
- liste de mineurs exclus,
- graphes sans-AT.

2 Tours graphiques

- cographes, graphes d'intervalles,
- TDI sur les graphes sans chaise,
- séparation de $x(U) \geq c(U)$ sur les graphes d'intervalles.

3 Multiflots entiers

- tableau,
- 3 résultats de difficulté pour les biflots,
- algorithme polynomial.

- ① Tours graphiques
 - intervalles pondérés,
 - co-comparabilité, sans-TA,
 - décrire les mineurs exclus.
- ② Multiflots entiers
 - étendre l'algorithme polynomial,
 - le Graal : le problème de l'aller-retour.
- ③ De nouveaux horizons. . .

Questions ?

