Tournée et partition d'éclatement maximum.

Vincent Jost[1], Guyslain Naves[2]

LIAFA, Paris, 2 juin 2009

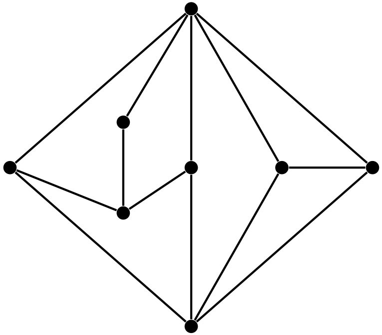
[1]CNRS, LIX, École Polytechnique, Palaiseau

[2]G-SCOP, Grenoble

Définition : Tour graphique

Visiter chaque sommet

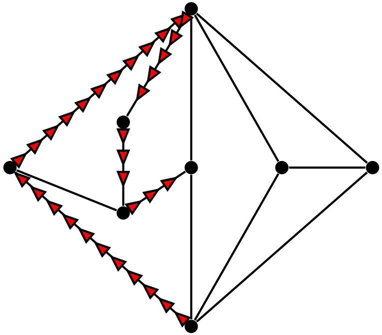
Minimiser la longueur du tour.



Définition : Tour graphique

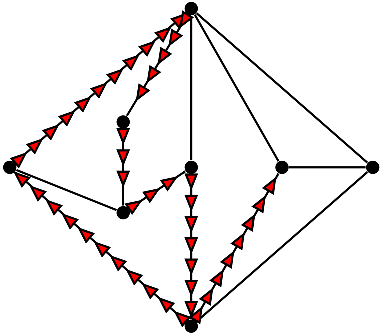
Visiter chaque sommet

Minimiser la longueur du tour.



Définition : Tour graphique

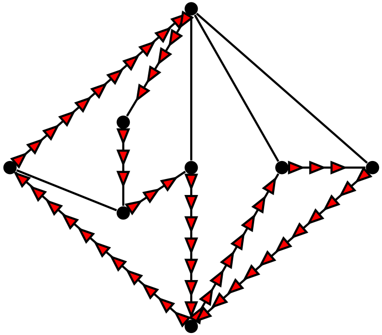
Visiter chaque sommet — Minimiser la longueur du tour.



Définition : Tour graphique

Visiter chaque sommet

Minimiser la longueur du tour.



Hamiltonien ssi longueur minimale est $|V|$

Un chouia de rappels

Hamiltonicité est NP-Complet pour :

- triangulés
- bipartis et split graphs
- planaires

Mais, bonne caractérisation pour intervalles, co-comparabilité

Un chouia de rappels

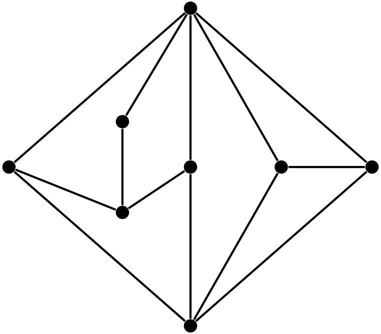
Hamiltonicité est NP-Complet pour :

- triangulés
- bipartis et split graphs
- planaires

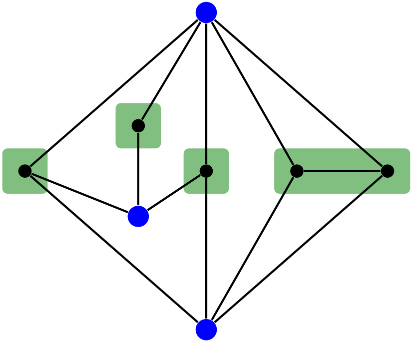
Mais, bonne caractérisation pour intervalle, co-comparabilité !

Notre propos !

Définition : Ensembles éclatants



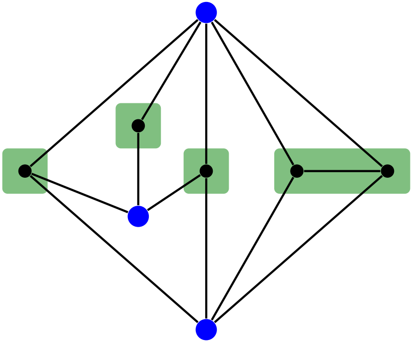
Définition : Ensembles éclatants



Définition : Ensembles éclatants

Ensemble éclatant U : $c(U) > |U|$

$c(U)$: composantes de $G - U$



Trouver des ensembles éclatants est NP-difficile !

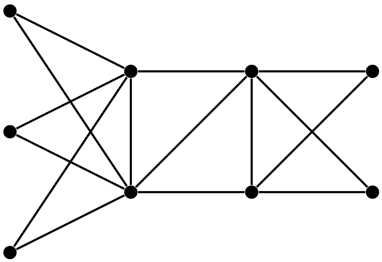
Graphe k-tough

Définition (Toughness d'un graphe)

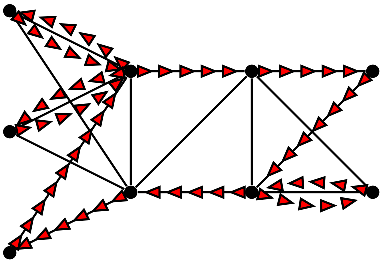
Minimum de $\frac{|U|}{c(U)}$ pour U tel que $c(U) > 1$.
Un graphe est dit k-tough si sa toughness est inférieur à k.

Conjecture (Chvátal) :
Il existe t tel que tout graphe t-tough est Hamiltonien
Si t existe, $t \geq \frac{9}{4}$

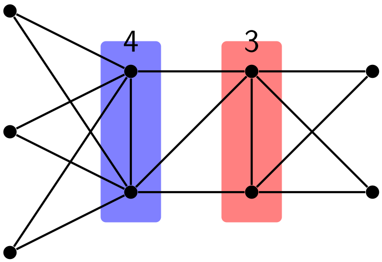
Programmes linéaires



Programmes linéaires



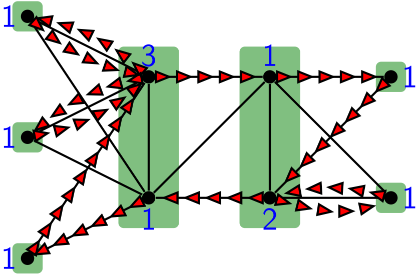
Programmes linéaires



Programmes linéaires

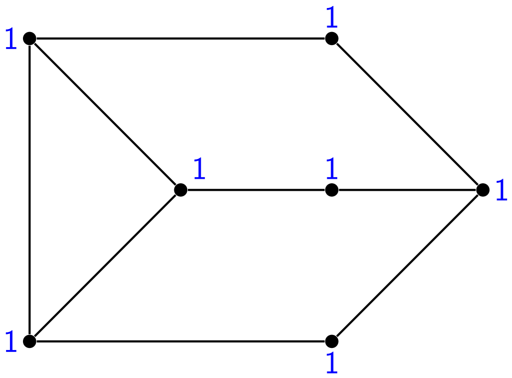
Primal : min x
$x(U) \geq c(U) \qquad (U \subseteq V)$

Dual : max $\sum_{U \subseteq V} y_U c(U)$
$\sum_{U \ni v} y_U = 1 \qquad (x \in V)$



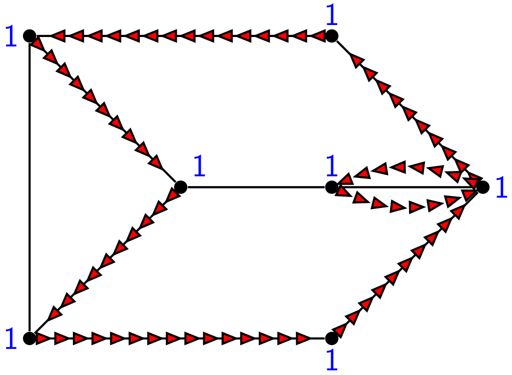
Longueur tour $\geq x$ minimum $= y$ maximum

Primal $\neq$ tour



Solution primale : 7

Primal $\neq$ tour

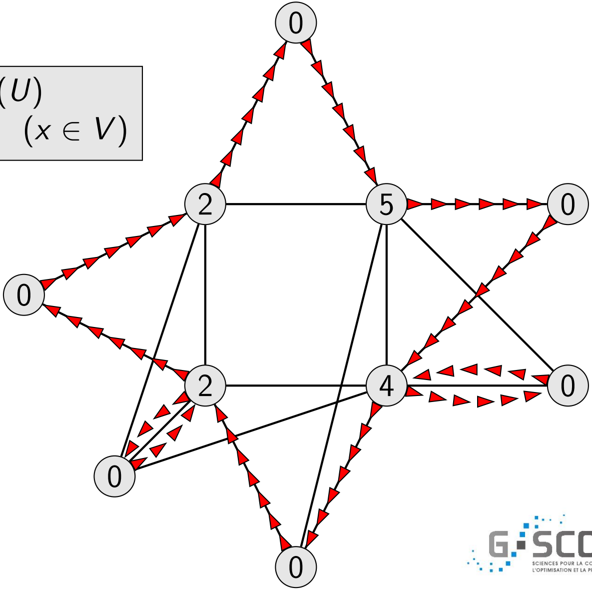


Solution primale : 7

Tour le plus court : 8

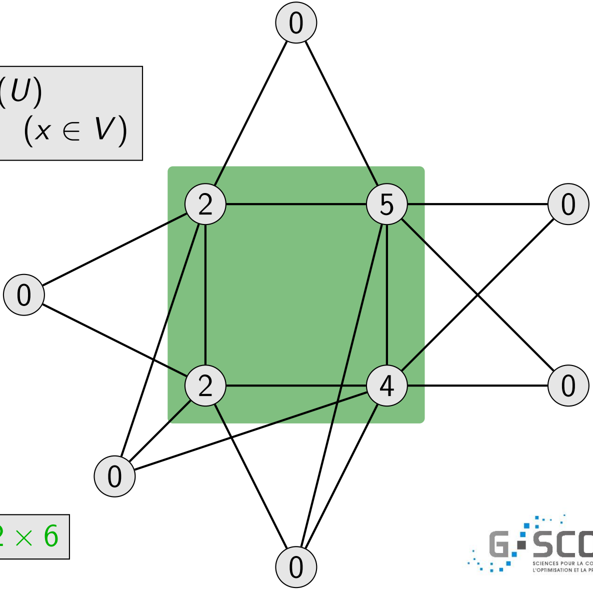
Un exemple pondéré

$$\max \quad \sum_{U\subseteq V} y_U c(U)$$
$$\sum_{U\ni v} y_U = w_v \qquad (x \in V)$$



Un exemple pondéré

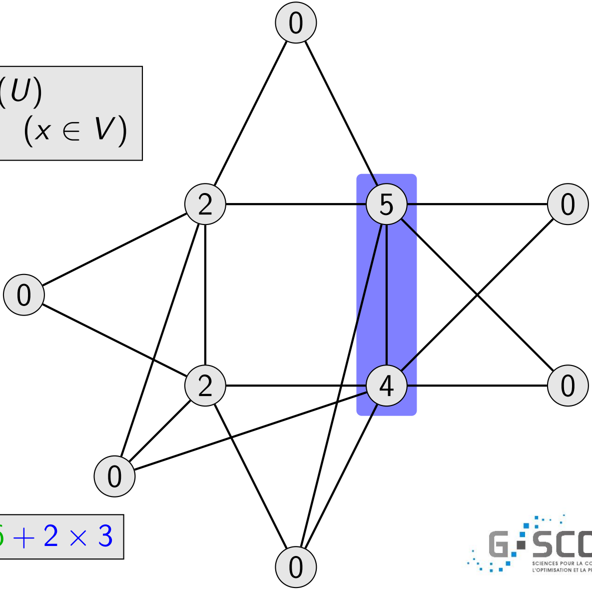
$$\max \quad \sum_{U \subseteq V} y_U c(U)$$
$$\sum_{U \ni v} y_U = w_v \qquad (x \in V)$$



2×6

Un exemple pondéré

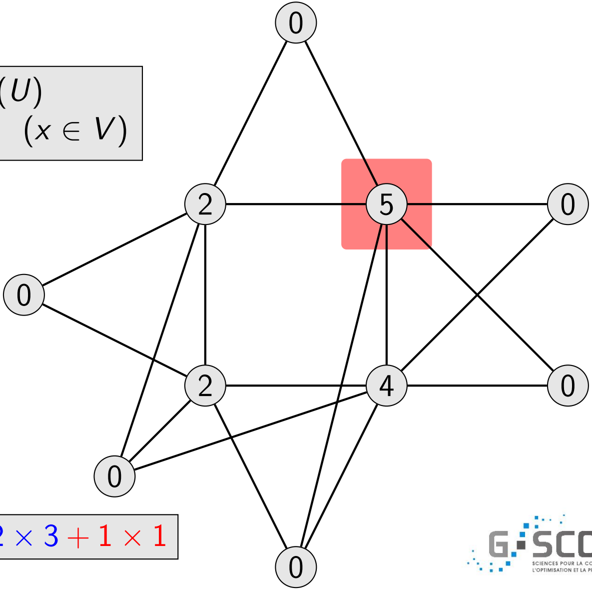
$$\max \quad \sum_{U \subseteq V} y_U c(U)$$
$$\sum_{U \ni v} y_U = w_v \qquad (x \in V)$$



$2 \times 6 + 2 \times 3$

Un exemple pondéré

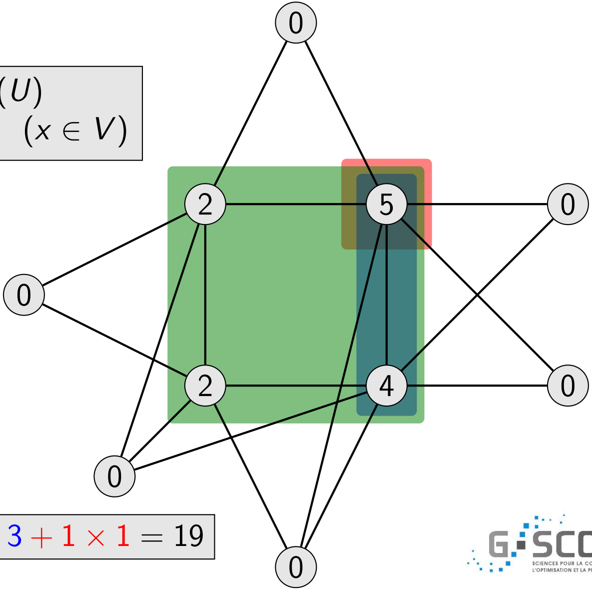
$$\max \quad \sum_{U\subseteq V} y_U c(U)$$
$$\sum_{U\ni v} y_U = w_v \qquad (x \in V)$$



$2 \times 6 + 2 \times 3 + 1 \times 1$

Un exemple pondéré

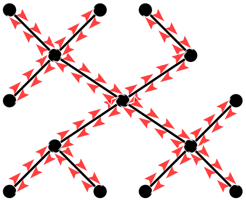
$$\max \quad \sum_{U \subseteq V} y_U c(U)$$
$$\sum_{U \ni v} y_U = w_v \qquad (x \in V)$$



$$2 \times 6 + 2 \times 3 + 1 \times 1 = 19$$

Exemple sur une classe de graphe

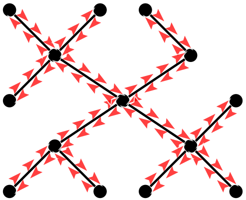
Sur les arbres :



- Longueur d'un tour : $\boxed{2|E(G)|}$,
- $c(\{u\}) = d(u)$ pour tout sommet u,
- Solution duale valant $\boxed{\sum_{u \in V} d(u)}$.

Exemple sur une classe de graphe

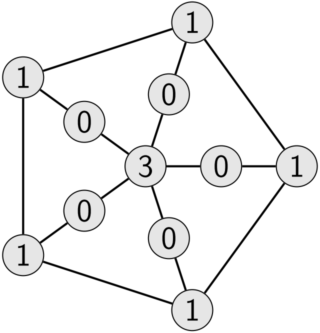
Sur les arbres :



- Longueur d'un tour : $2|E(G)|$,
- $c(\{u\}) = d(u)$ pour tout sommet u,
- Solution duale valant $\sum_{u \in V} d(u)$.

$=$

Intégralité des solutions ?



Primal :

min $\quad wx$

$x(U) \geq \mathrm{c}(U) \qquad (U \subseteq V)$

Dual :

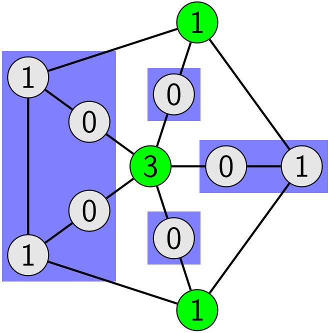
max $\quad \sum_{U \subseteq V} y_U \mathrm{c}(U)$

$\sum_{U \ni v} y_U = w_v \qquad (x \in V)$

Dual :

Primal :

Intégralité des solutions ?



Primal :

min $\quad wx$

$x(U) \geq \mathrm{c}(U) \qquad (U \subseteq V)$

Dual :

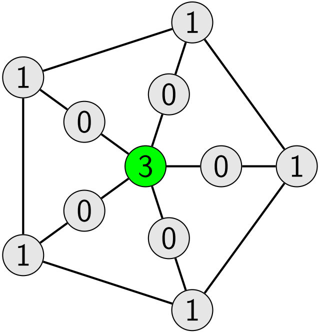
max $\quad \sum_{U \subseteq V} y_U \mathrm{c}(U)$

$\sum_{U \ni v} y_U = w_v \qquad (x \in V)$

Dual : $5 \times \frac{1}{2} \times 4$

Primal :

Intégralité des solutions ?



Primal :

min $\quad wx$

$x(U) \geq \mathrm{c}(U) \qquad (U \subseteq V)$

Dual :

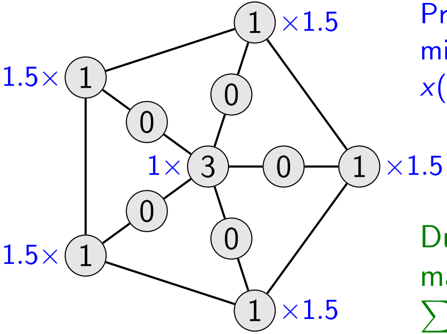
max $\quad \sum_{U \subseteq V} y_U \mathrm{c}(U)$

$\sum_{U \ni v} y_U = w_v \qquad (x \in V)$

Dual : $5 \times \frac{1}{2} \times 4 \quad + \frac{1}{2} \times 1 = 10.5$

Primal :

Intégralité des solutions ?



Primal :

min $\quad wx$

$x(U) \geq \mathrm{c}(U) \qquad (U \subseteq V)$

Dual :

max $\quad \sum_{U \subseteq V} y_U \mathrm{c}(U)$

$\sum_{U \ni v} y_U = w_v \qquad (x \in V)$

Dual : $5 \times \frac{1}{2} \times 4 \quad + \frac{1}{2} \times 1 = 10.5$

Primal : $5 \times 1.5 + 3 = 10.5$

Définition : Graphe d'intervalle

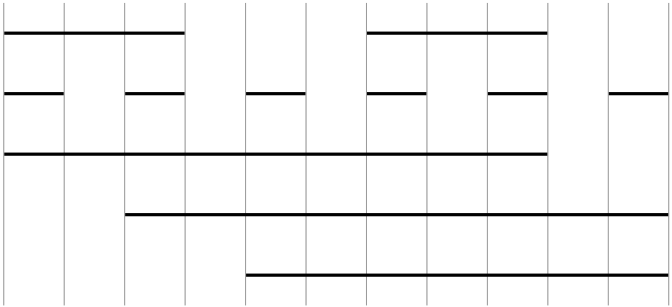
Objectif : trouver des classes de graphes pour lesquelles

Tour minimum = Packing maximum

Définition : Graphe d'intervalle

Objectif : trouver des classes de graphes pour lesquelles

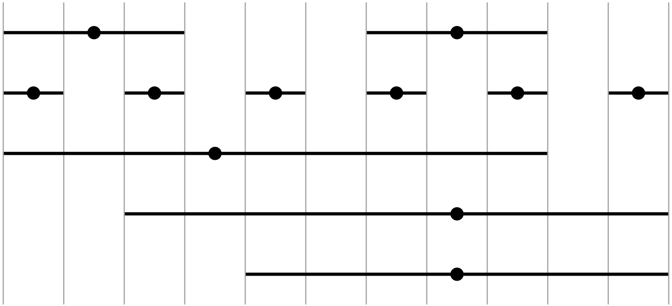
Tour minimum = Packing maximum



Définition : Graphe d'intervalle

Objectif : trouver des classes de graphes pour lesquelles

Tour minimum = Packing maximum

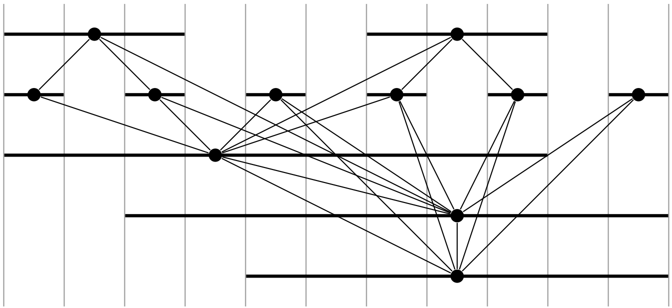


Un sommet par intervalle.

Définition : Graphe d'intervalle

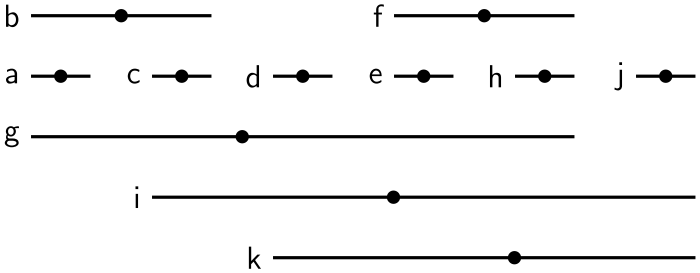
Objectif : trouver des classes de graphes pour lesquelles

Tour minimum = Packing maximum

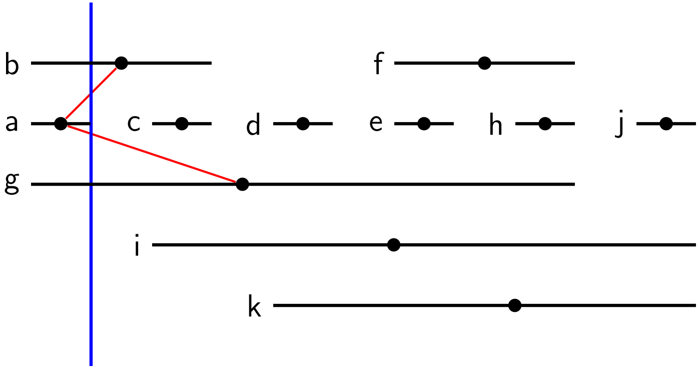


Adjacence = intersection des deux intervalles non-vide.

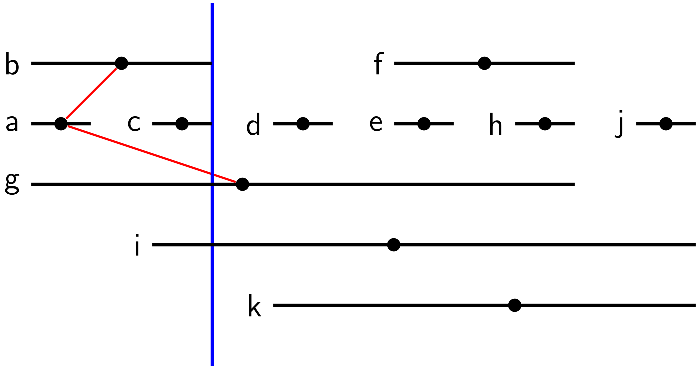
Hamiltonicité sur les intervalles (Keil,1985)



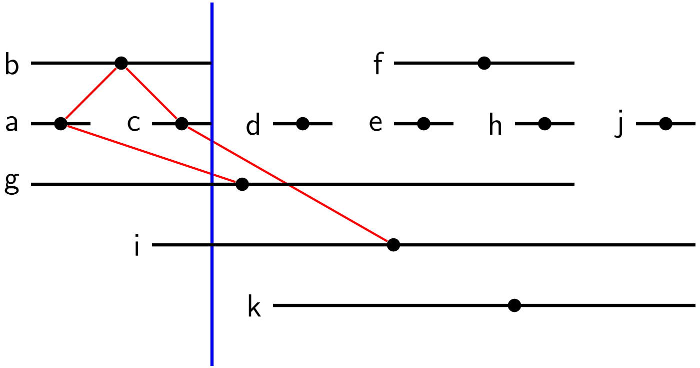
Hamiltonicité sur les intervalles (Keil,1985)



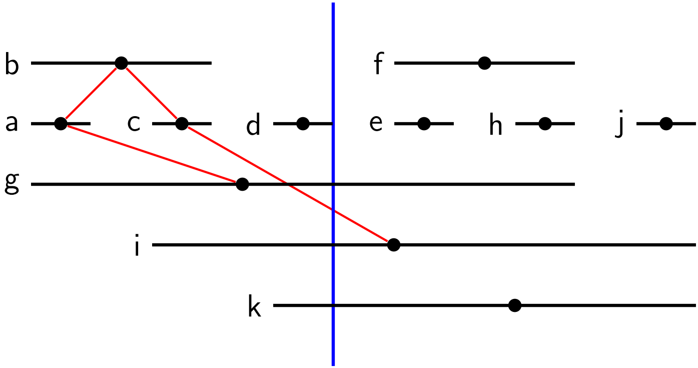
Hamiltonicité sur les intervalles (Keil,1985)



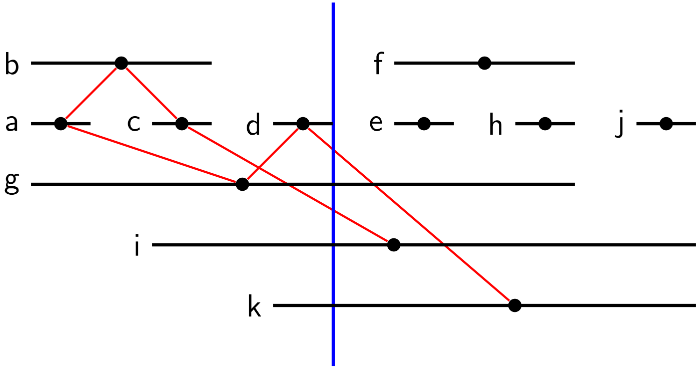
Hamiltonicité sur les intervalles (Keil,1985)



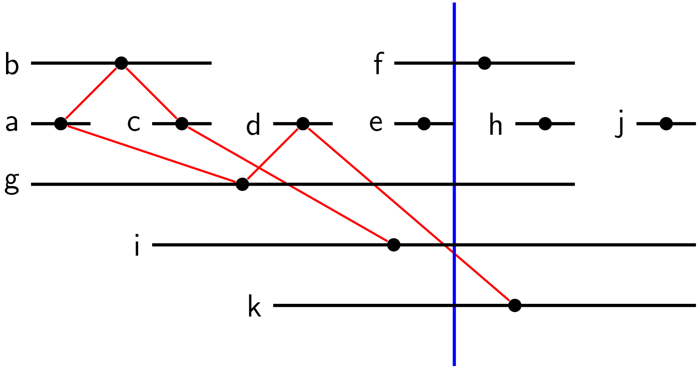
Hamiltonicité sur les intervalles (Keil,1985)



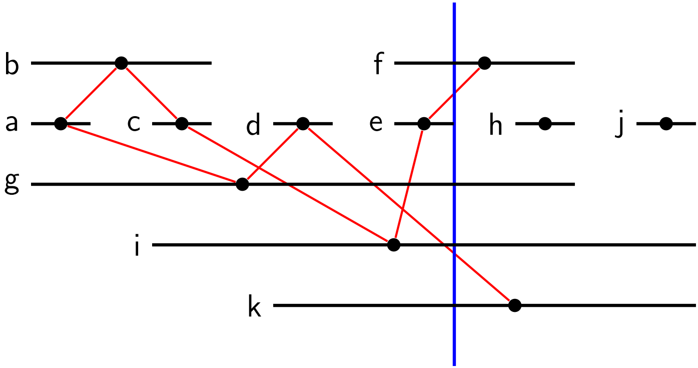
Hamiltonicité sur les intervalles (Keil,1985)



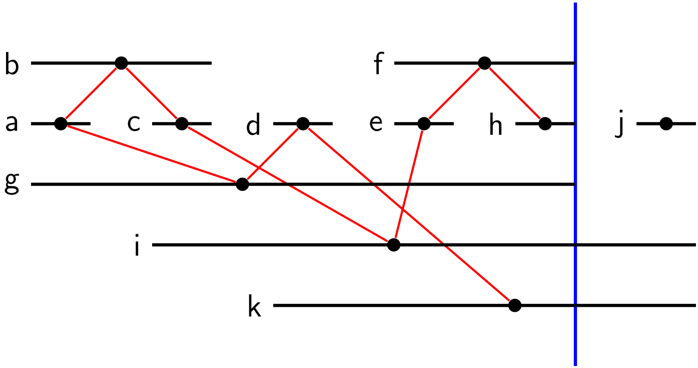
Hamiltonicité sur les intervalles (Keil,1985)



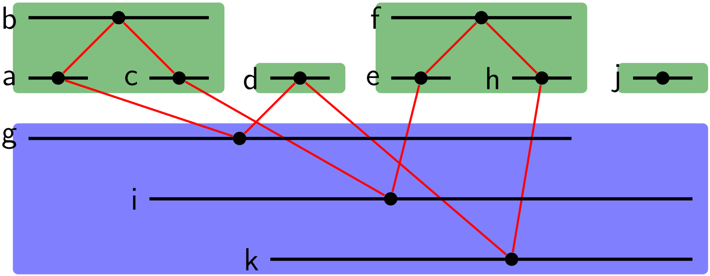
Hamiltonicité sur les intervalles (Keil,1985)



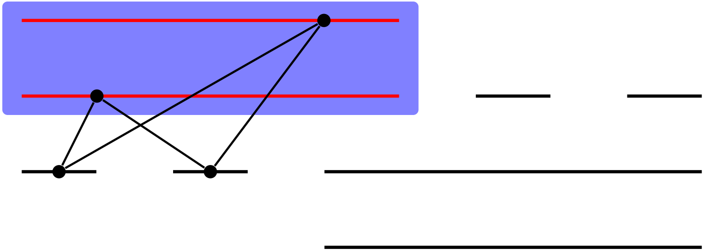
Hamiltonicité sur les intervalles (Keil,1985)



Hamiltonicité sur les intervalles (Keil,1985)

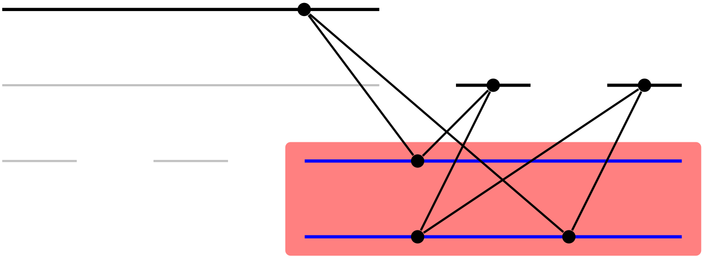


Tour et Dual sur les intervalles (I)

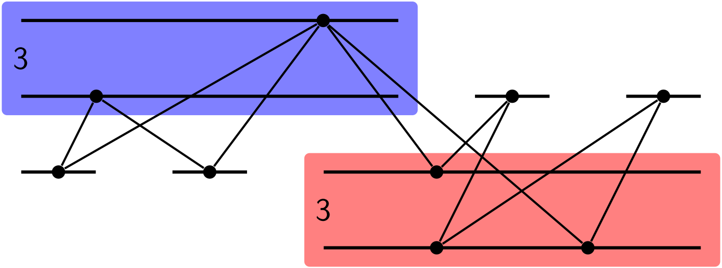


Tour et Dual sur les intervalles (I)

Tour et Dual sur les intervalles (I)

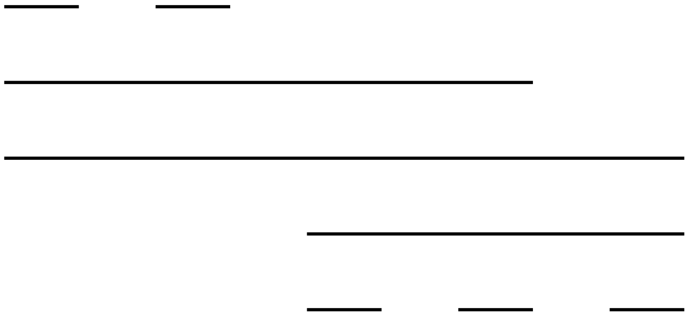


Tour et Dual sur les intervalles (I)

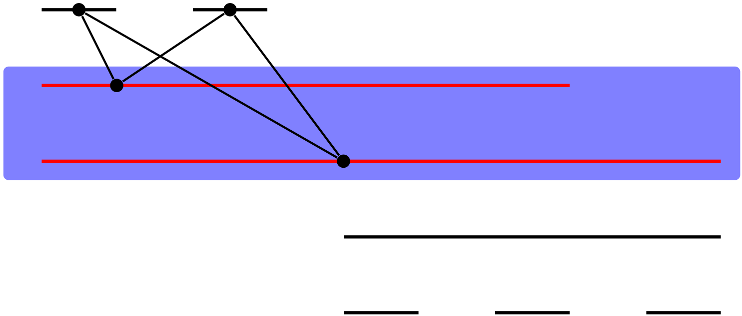


On fusionne les deux tours par le sommet commun.

Tour et Dual sur les intervalles (II)

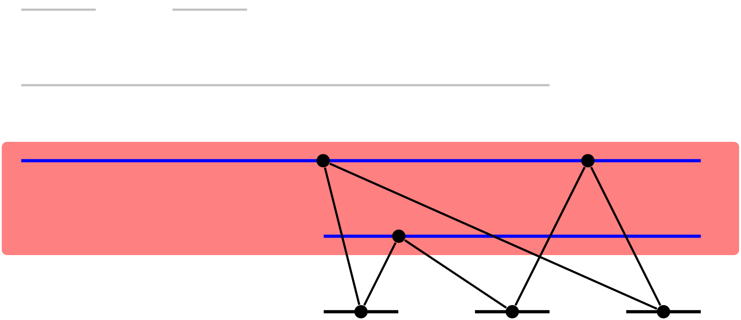


Tour et Dual sur les intervalles (II)

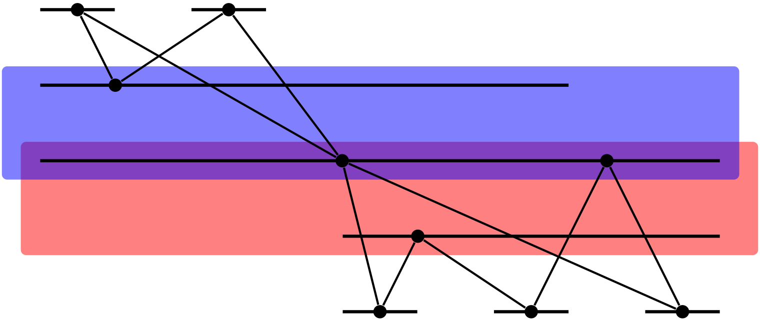


Tour et Dual sur les intervalles (II)

Tour et Dual sur les intervalles (II)

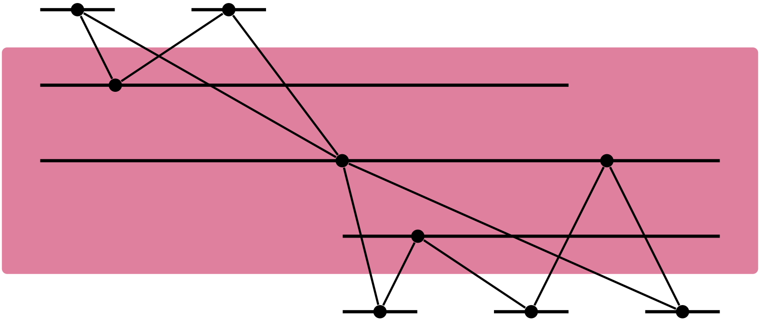


Tour et Dual sur les intervalles (II)



On fusionne les deux tours par le sommet commun.

Tour et Dual sur les intervalles (II)



On fusionne les deux tours par le sommet commun.

Intervalles et poids ?

Théorème

Pour les graphes d'intervalles, la longueur d'un plus court tour est égale au maximum de la somme de c pris sur les partitions de l'ensemble des sommets.

Question :

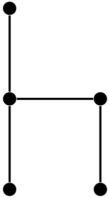
Que se passe-t-il sur les graphes d'intervalles avec une fonction de poids sur les sommets ?

Entracte

Théorème

Le système d'inéquation du problème primal est TDI dans les graphes sans chaise induite.

Fonction d'ensemble supermodulaire sur les ensembles intersectants non-séparables $\Rightarrow$ solution laminaire.



En particulier, sur les graphes sans griffe ou sans P_4...

Définition : Cographe

Cographe = graphe sans P_4 induit.

Inductivement (décomposition modulaire) :

- soit non connexe, composantes = cographes,
- soit non co-connexe, co-composantes = cographes,
- soit réduit à un seul sommet.

Cas particulier : cographe équilibré

Condition de Dirac :

Théorème

Tout graphe G de degré minimum supérieur à $\frac{|V(G)|}{2}$ est hamiltonien.

Conséquence :

Si G est un cographe connexe, dont aucune co-composante ne contient strictement plus de la moitié des sommets, G est Hamiltonien.

Cas particulier : cographe déséquilibré

Que se passe-t-il avec une grosse co-composante ?

- Récurrence sur les composantes connexes de la co-composante,
- Fournit tours et ensembles éclatants,
- On construit un nouveau tour et un nouvel ensemble éclatant.

Algorithme polynomial, même dans le cas pondéré.

Graphe de co-comparabilité

Théorème (Damaschke et al., 1991)

Pour les graphes de co-comparabilité, le nombre de complétion en chemin Hamiltonien est égal à la déficience maximum d'un ensemble éclatant moins un.

Moralité :

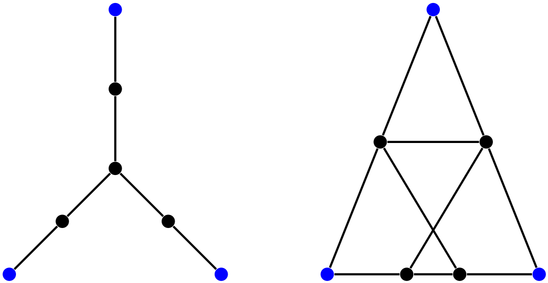
Un ensemble éclatant suffit pour le nombre de complétion.
Peut-on caractériser aussi les tours minimaux avec les ensembles éclatants ?

Encore plus haut...

Graphes sans triplet astéroïdaux (*AT-free*) :

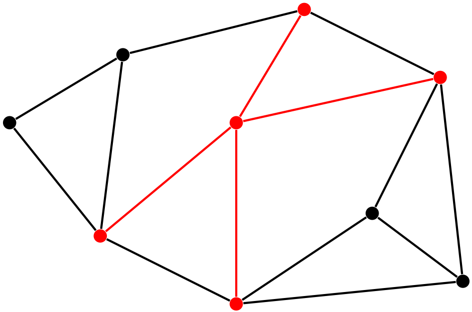
AT : x_1, x_2, x_3 tels qu'il existe un (x_i, x_j)-chemin évitant $N(x_k)$.

- Hamiltonicité ouvert.
- Tous nos contre-exemples à tous nos problèmes ont des AT.
- Contiennent co-comparabilité et intervalle.



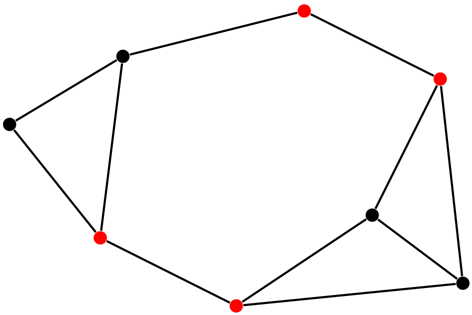
Opérations de mineurs exotiques

- *suppression de sommet*,
- *contraction de sommet*,
- *(contraction d'arête)*.



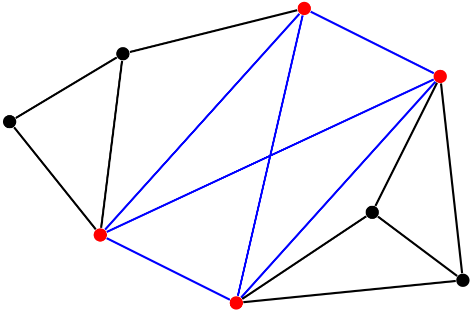
Opérations de mineurs exotiques

- *suppression de sommet*,
- *contraction de sommet*,
- *(contraction d'arête)*.



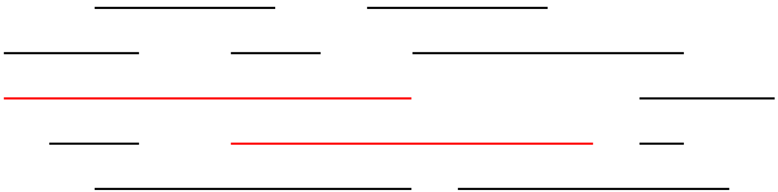
Opérations de mineurs exotiques

- *suppression de sommet*,
- *contraction de sommet*,
- *(contraction d'arête)*.



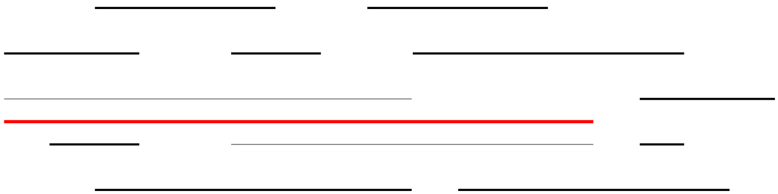
Mineurs et intervalles (I)

Contraction d'arête :



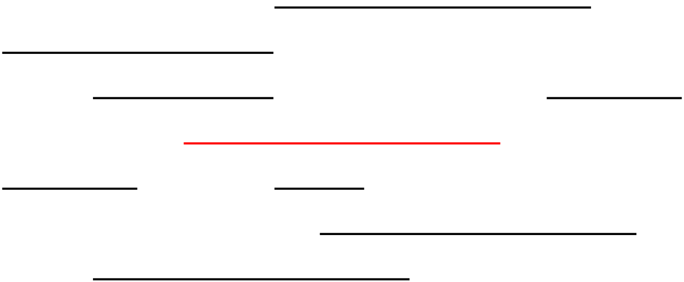
Mineurs et intervalles (I)

Contraction d'arête :



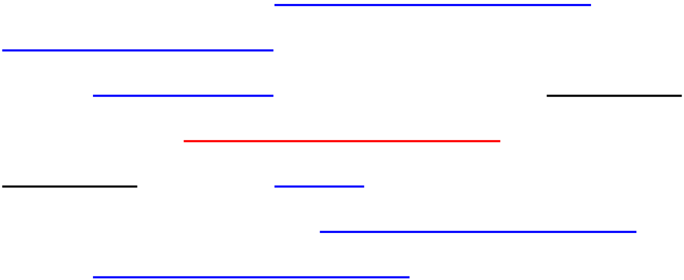
Mineurs et intervalles (II)

Contraction de sommet :



Mineurs et intervalles (II)

Contraction de sommet :



Mineurs et intervalles (II)

Contraction de sommet :

Mineurs et classe de graphes

Proposition

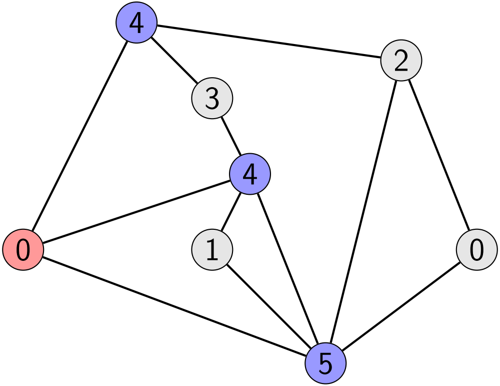
Les graphes d'intervalles sont fermés par nos trois opérations de mineurs

et même :

Proposition

Les graphes AT-free sont fermés par nos trois opérations de mineurs

Contraction de sommet et tour



Perte de l'obligation de passage par ce sommet !

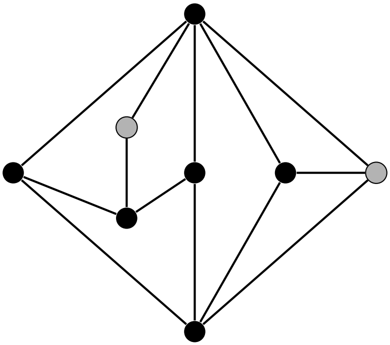
Mineurs et version Steiner

Si un sommet est de poids infini : *suppression de sommet*.

Mais perte d'information à nouveau !

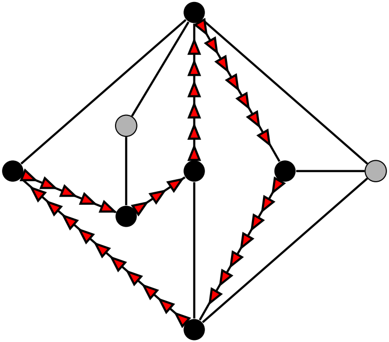
Solution : on relâche la contrainte de passer par chaque sommet !

Tour de Steiner



Les sommets gris ne sont pas obligatoires.

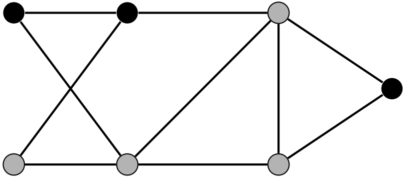
Tour de Steiner



Les sommets gris ne sont pas obligatoires.

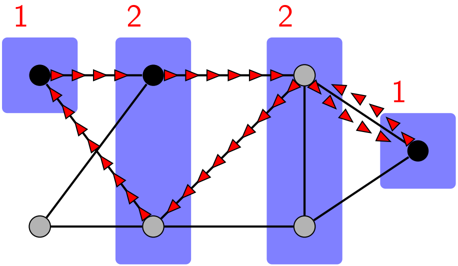
Steiner et ensembles éclatants

$\widetilde{c_U}(S)$: nombre de composantes de $G - S$ contenant au moins un sommet de U (l'ensemble des non-optionnels).



Steiner et ensembles éclatants

$\widetilde{c_U}(S)$: nombre de composantes de $G - S$ contenant au moins un sommet de U (l'ensemble des non-optionnels).



Steiner et intervalles

Théorème

Pour tout graphe d'intervalle et tout ensemble de sommets obligatoires S, la longueur minimum d'un tour passant par tous les sommets de S est égale au maximum de la somme des $\widetilde{c}_S$ pris sur toutes les partitions de $V(G)$.

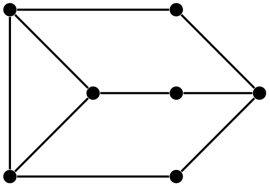
Steiner et mineurs exotiques

Théorème

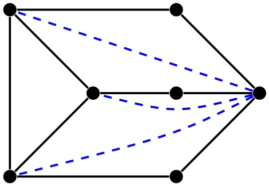
La classe des graphes pour lesquels la longueur du plus court tour est égale à la $\widetilde{c}_S$-valeur maximum d'un w-packing (pour tout poids $w \in \mathbb{Z}_+^V$ et tout ensemble de sommets obligatoires S), est fermée par sous-graphes induits et par contraction de sommets.

Mais on va chercher aussi par mineurs exotiques exclus, pour avoir une liste plus simple.

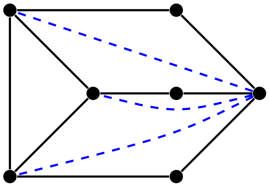
Minimaux exotiques exclus

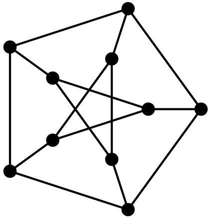


Minimaux exotiques exclus

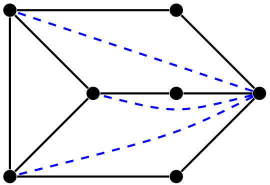


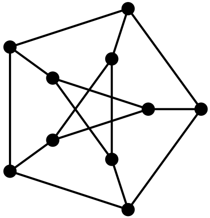
Minimaux exotiques exclus





Minimaux exotiques exclus





Probablement d'autres, lesquels ?

Séparation du primal

Primal :

$$\begin{array}{ll} \min & wx \\ x(U) \geq \mathrm{c}(U) & \quad (U \subseteq V) \end{array}$$

Séparation du primal

Primal :

$$\begin{array}{ll} \min & wx \\ x(U) \geq \mathrm{c}(U) & (U \subseteq V) \end{array}$$

Séparation :

$|S| - x(U) > 0$
avec S stable,
U bloqueur des S-chemins,
U et S disjoints.

Séparation du primal

Primal :

$$\begin{array}{ll} \min & wx \\ x(U) \geq \mathrm{c}(U) & (U \subseteq V) \end{array}$$

Plus généralement :

$\max_{S,U} y(S) - x(U)$,
avec S stable,
U bloqueur des S-chemins,
U et S disjoints.

Stable maximum

$$
\begin{aligned}
&\max y(S) - x(U)\\
&\text{avec : } S \text{ stable,}\\
&\qquad\quad U \text{ bloqueur des } S\text{-chemins,}\\
&\qquad\quad U \text{ et } S \text{ disjoints.}
\end{aligned}
$$

Pour $x = 0$, trouver un stable maximum.

Stable maximum

$$\max y(S)$$
$$\text{avec : } S \text{ stable,}$$

Pour $x = 0$, trouver un stable maximum.

Toughness

$\max y(S) - x(U)$,
avec : S stable,
U bloqueur des S-chemins,
U et S disjoints.

Pour $y = k, x = 1$, décider si le graphe est k-tough.
Pour $k = 1$, décider l'existence d'un ensemble éclatant.

Toughness

$$\max |S| - k|U|,$$
avec : S stable,
U bloqueur des S-chemins,
U et S disjoints.

Pour $y = k, x = 1$, décider si le graphe est k-tough.
Pour $k = 1$, décider l'existence d'un ensemble éclatant.

Multicoupe à la Mader

$$\begin{aligned}
&\max y(S) - x(U),\\
&\text{avec : } S \text{ stable},\\
&\qquad\quad U \text{ bloqueur des } S\text{-chemins},\\
&\qquad\quad U \text{ et } S \text{ disjoints.}
\end{aligned}$$

Pour $y \in \{0; +\infty\}$, trouver un bloquant minimum des $\mathcal{S}$-chemins.

Multicoupe à la Mader

$$\min x(U)$$
avec :
$$U \text{ bloqueur des } \mathcal{S}\text{-chemins},$$
$$U \in V \setminus \mathcal{S}.$$

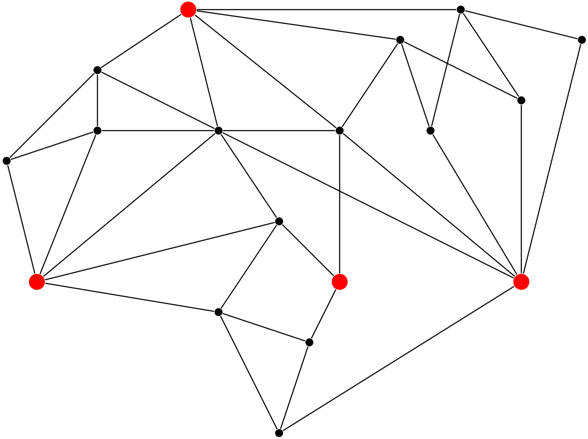
Pour $y \in \{0; +\infty\}$, trouver un bloquant minimum des $\mathcal{S}$-chemins.

Chemins disjoints façon Mader

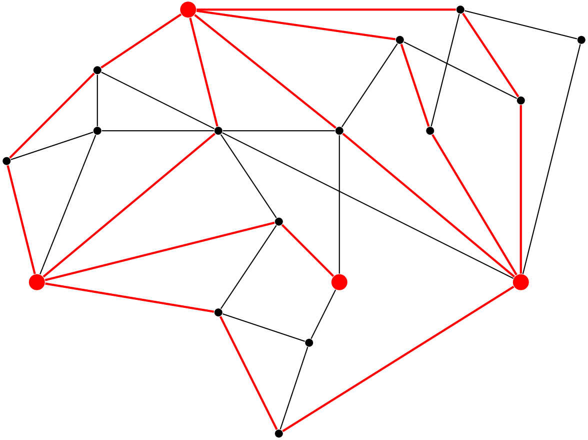
Soit $T \subseteq V$.
T-chemins : $\{(s,t)\text{-chemins} \; : \; s \neq t, s, t \in T\}$

Problème :
Trouver un ensemble maximum de T-chemins internement sommet-disjoints

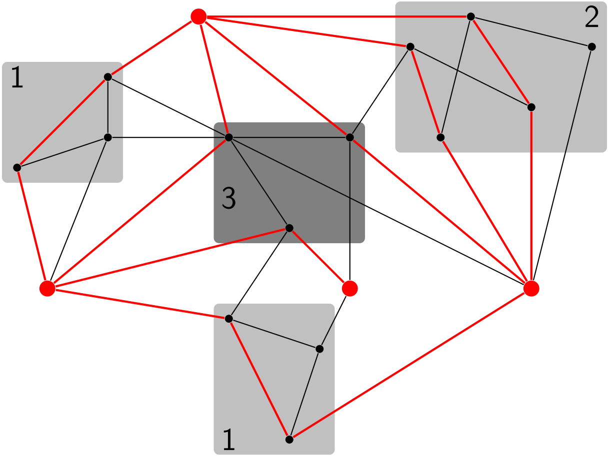
Exemples pour Mader



Exemples pour Mader



Exemples pour Mader



Théorème de Mader

Notons $B_G(U) = |N(V(G) \setminus U) \cap U|$.

Théorème (Mader 1978)

Le nombre maximum de T-chemins internement disjoints est égal au minimum de :

$$|U_0| + \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{1}{2} B_{G-U_0}(U_i) \right\rfloor$$

avec $U_0, U_1, \dots U_k$ partition de $V \setminus T$ telle que tout T-chemins intersecte $V(U_0)$ ou $E(U_i)$.

Bloquer façon Menger ?

Quand avons-nous :
Le nombre maximum de T-chemins internement disjoints est égal au cardinal minimum d'un ensemble $|U| \subseteq V \setminus T$ tel que $G \setminus U$ n'a pas de T-chemins ?

Plus fort : caractériser les graphes G tels que pour tout $T \subseteq V(G)$ stable, le système suivant est TDI :

$$x(P) \geq 1 \quad \text{pour tout } T\text{-chemin } P$$
$$x \in \mathbb{R}_+^{V(G)}$$

Mader et mineurs de sommets

Proposition

La classe des graphes pour lesquels le système :

$$x(P) \geq 1 \quad \textit{pour tout } T\textit{-chemin } P$$

pour tout stable T est TDI est fermée par mineurs de sommet.

preuve. . .

Une caractérisation

Soit G_T le graphe, de sommets $N_G(T)$ obtenu par :

- contraction de $V(G) \setminus N_G(T)$,
- puis suppression des arêtes de $N_G(t)$, $t \in T$.

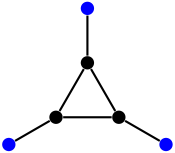
Alors :

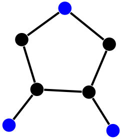
Théorème

$x(P) \geq 1$ est TDI ssi G_T est biparti.

Preuve...

Mineurs interdits





Théorème

Pour tout graphe G sans ces deux mineurs (par mineur de sommet et contraction d'arête), et T un stable de G, le système suivant est TDI :

$$x(P) \geq 1 \text{ pour tout } T\text{-chemin } P.$$

En particulier les graphes AT-free.

Fin

Merci de votre attention !