

# Méthodes avancées pour l'optimisation combinatoire

Cours doctoral de Yann Kieffer

12 mars 2009

Menu :

- Méthode des ellipsoïdes et applications (séances 1 et 2)
- Programmation semi-définie (SDP) et application à Max-CUT (Goemans Williamson) (séance 3)
- Background sur les graphes parfaits (séance 4)
- Aspects polyédraux des graphes parfaits, fonction  $\theta$  de Lovász (séance 5)
- Coupes matricielles de Lovász et Schrijver (séance 6 et 7)
- L'apport du point de vue constructif (séance 8)

Un outil premier de l'optimisation discrète est la méthode polyédrale.

Par exemple, le problème du sac-à-dos : nous avons un certain nombre d'objets, définis par une valeur et une utilité, et une capacité. La question est d'optimiser la valeur totale des objets pris, en respectant la capacité du sac et en maximisant la valeur prise.

L'idée principale de la méthode polyédrale est d'établir une correspondance entre les solutions réalisables du problème, ici les sous-ensemble d'objets, à un ensemble de variables, dans ce cas une variable pour chaque objet à valeur dans  $\{0, 1\}$ , c'est-à-dire un vecteur, ou de manière équivalente une fonction, permettant de coder les sous-ensembles.

$$U \subseteq S \equiv S \rightarrow \{0, 1\}$$

On exprime ensuite les contraintes du problème comme des équations sur le vecteur, dans ce cours des contraintes linéaires. Pour le sac-à-dos, la seule contrainte est :

$$\sum_i w_i x_i \leq K$$

Pourquoi prendre des contraintes linéaires ? La vraie raison est la convexité. Un message du cours est que peu importe la nature de l'ensemble des solutions réalisables, ce qui est utile est la convexité de cet ensemble. Ce n'est

pas un problème de finitude. Nous verrons des polyèdres avec un nombre infini de faces, sur lesquels on sait optimiser.

Pour le problème du sac-à-dos, nous obtenons le programme entier suivant :

$$\max \sum v_i x_i \quad \text{t.q.} \quad (1)$$

$$\sum_i w_i x_i \leq K \quad (2)$$

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad (3)$$

$$x_i \text{ entier} \quad (4)$$

La dernière contrainte casse la convexité de la description. La solution généralement adoptée est de prendre l'enveloppe convexe des points entiers définis par les contraintes (qui existe), mais malheureusement on ne connaît pas la description de cette enveloppe. On cherche alors des coupes permettant de rogner le polyèdre relaxé, comme la méthode de Chvatal-Gomory (une combinaison de contraintes ayant un second membre non-entier, permet de baisser cette constante à sa partie entière). Malheureusement, déterminer si un point vérifie toutes les contraintes ainsi obtenu est NP-complet. Cette méthode est donc insatisfaisante, surtout dans une perspective pratique.

Nous avons donc un objet convexe, qui ne décrit pas bien le problème, un autre non-convexe mais décrivant correctement le problème, et un dernier, convexe mais qu'on ne sait pas bien décrire (enveloppe convexe des points entiers). Les coupes matricielles permettent d'obtenir cette enveloppe convexe, avec l'itération d'un opérateur un nombre linéaire de fois. Cet opérateur est en lui-même polynomial, mais complique le polyèdre, et donc ne donne pas d'algorithme polynomial. C'est considéré comme inimplémentable par Lovász et Schrijver, Yann est de l'avis contraire.

Nous parlerons aussi de la programmation semi-définie, qui généralise la programmation linéaire, tout en restant polynomial. Les graphes parfaits, introduits par Berge, généralisaient dès leur introduction un certain nombre de classes de graphes. Il a aussi énoncé deux conjectures, l'une résolue par Lovász en 1972, et l'autre par Chudnovski, Roberston, Seymour et Thomas en 2002. Mais reste la question de trouver un algorithme combinatoire polynomial pour colorier les graphes parfaits (un algorithme polynomial non-combinatoire sera décrit dans le cours).

Le cours sera aussi influencé par les mathématiques constructives, et se focalisera sur les intuitions plus que les détails techniques.

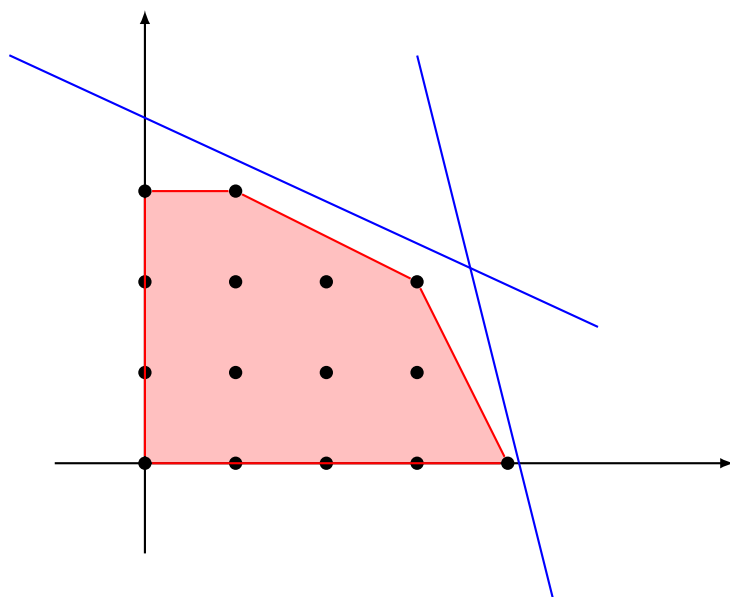


FIG. 1 – *Les 15 points entiers de ce polyèdre ne forment pas un ensemble convexe. On peut considérer leur enveloppe convexe, qui n'est pas nécessairement facile à décrire ou construire.*

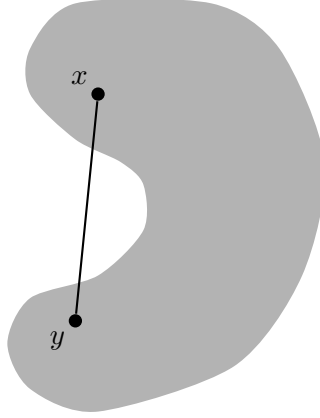


FIG. 2 – *Un ensemble non-convexe. Le segment  $[x, y]$  n'est pas contenu dans cet ensemble, bien que ces extrémités en fassent parties*

Les ellipsoïdes sont une méthode utilisant les nombre réels, donc non combinatoire (ce qui frustre les combinatoriciens).

## 1 La méthode des ellipsoïdes

### 1.1 Convexité

**Contexte :** les candidats à la convexité sont les sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.** *Un sous-ensemble  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit convexe si pour tout couple  $(x, y)$  de points de  $S$ , le segment  $[x, y]$  est inclus dans  $S$  :*

$$\forall x, y \in S, [x, y] \subseteq S$$

**Définition 2** (segment).

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\}$$

*Exemple 1.*  $\{x : Ax \leq b\}$  est convexe.

*Preuve.* Soient  $x$  et  $y$  dans ce polyèdre. Soit  $\lambda \in [0, 1]$ . Alors

$$A(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda Ax + (1 - \lambda)Ay \tag{5}$$

$$\leq \lambda b + (1 - \lambda)b \tag{6}$$

$$= b \tag{7}$$

□

*Exemple 2.* La boule unité est convexe.

*Preuve.* Soient  $x$  et  $y$  dans  $B(0, 1)$ , et  $\lambda \in [0, 1]$ .

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \leq \lambda\|x\| + (1 - \lambda)\|y\| \quad (8)$$

$$\leq 1 \quad (9)$$

□

*Exemple 3.* Les matrices semi-définies positives. On se place dans l'espace affine des matrices carrées symétriques de taille  $n$ .

$$\mathcal{S} = \{M : \forall x \in \mathbb{R}^n, x^t M x \geq 0\}$$

Soient  $M_1$  et  $M_2$  dans  $\mathcal{S}$ . Soit  $\lambda \in [0, 1]$ . Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ .

$$x^t(\lambda M_1 + (1 - \lambda)M_2)x = \lambda x^t M_1 x + (1 - \lambda)x^t M_2 x \quad (10)$$

$$\geq 0 \quad (11)$$

C'est sur ce dernier exemple que repose la polynomialité de la programmation définie. En réalité, il faut aller un peu plus loin et s'intéresser à la séparation des convexes.

## 1.2 Séparation des convexes

Il y a deux aspects à la séparation. L'aspect "maths pures", classique :

**Théorème 3.** Si  $S$  est un convexe de  $\mathbb{R}^n$ , et  $x^* \notin S$ , alors il existe  $a \in \mathbb{R}^n$  et  $b \in \mathbb{R}$  tel que

$$ax \leq b \text{ est valide pour tout point } x \text{ de } S \quad (12)$$

$$ax^* > b \quad (13)$$

*Remarque 1.* Ici,  $a$  est moralement une forme linéaire, puisque qu'on l'utilise pour faire un produit scalaire ;  $b$  est un seuil, un scalaire.

Nous ne démontrons pas ce théorème. Essayons de donner quelque chose de plus constructif, en séparant la boule :

Soit  $u$  de norme supérieure à 1, posons  $y = u/\|u\|$

$$ux \leq uy = \frac{\|u\|^2}{\|u\|}$$

Donc le demi-espace d'inéquation  $ux \leq \|u\|$  (ou  $yx \leq 1$ ) sépare la boule de  $u$ . Pas très intéressant cependant.

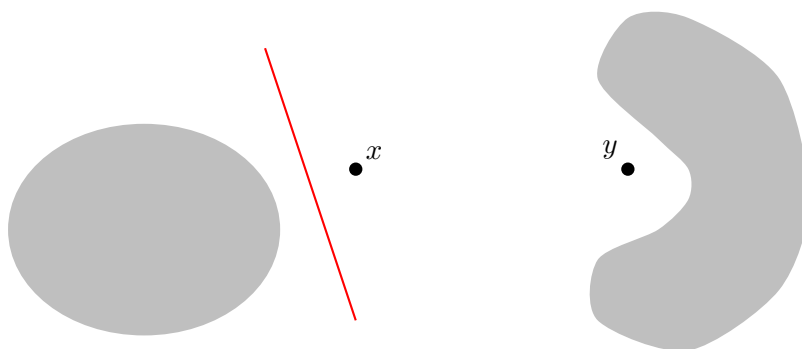


FIG. 3 – *En rouge, un hyperplan séparant le convexe de gauche de  $x$ . Il n'existe pas d'hyperplan pour séparer  $y$  de l'ensemble non-convexe de droite.*

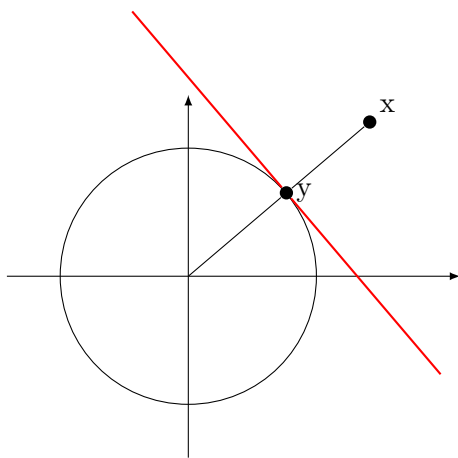


FIG. 4 – *Séparation de la boule.*

Séparons le polyèdre de  $Ax \leq B$ . Si  $y \notin \{x : Ax \leq b\}$ , alors il existe  $i$  tel que  $a_i y > b$ . Ce cas aussi est très facile. Voyons un cas plus intéressant.

### Séparation des matrices SDP.

Soit  $M$  une matrice carrée symétrique de taille  $n$  qui ne soit pas SDP. Il existe au moins un vecteur  $y \in \mathbb{R}^n$  tel que  $y^t M y < 0$ . Produit scalaire sur les matrices :

$$M.N = \sum_i \sum_j m_{ij} n_{ij} = \text{tr}(M^t N)$$

On cherche à séparer  $M$  de l'ensemble des matrices SDP, *i.e.* on cherche  $A$  matrice carrée symétrique et  $b$  réel tel que :

$$A.M > b \tag{14}$$

$$A.N \leq b, \forall N \text{ matrice SDP} \tag{15}$$

On prend  $b = 0$ , et  $A = -yy^t$

$$y^t M y = \text{tr}(y^t M y) \tag{16}$$

$$= \text{tr}(y^t y M) \tag{17}$$

$$= yy^t . \text{tr}(M) \tag{18}$$

Donc,  $A.M = -yy^t M = -y^t M y > 0$ , mais pour toute matrice SDP  $N$ ,  $A.N = -yy^t N = -y^t N y \leq 0$ . Pour être constructif, il faut montrer comment construire  $y$ , ce qui se fait par la diagonalisation.

*Rappel 1.* Les matrices symétriques réelles sont *diagonalisables* : pour tout  $M$  il existe  $D$  et  $P$  tels que  $M = PDP^{-1}$  avec  $D$  diagonale,  $P$  matrice de changement de bases (*orthogonale*, *i.e.*  $P^t = P^{-1}$ ).

Soit  $M$  une matrice SDP.

$$\forall x, x^t M x \geq 0 \Leftrightarrow \forall x, (Px)^t M (Px) \geq 0 \tag{19}$$

$$\Leftrightarrow \forall x, x^t P^t M P x \geq 0 \tag{20}$$

$$\Leftrightarrow \forall x, x^t D x \geq 0 \tag{21}$$

$$\Leftrightarrow \forall x, \sum_i d_i X_i^2 \geq 0 \tag{22}$$

$$\Leftrightarrow d_i \geq 0 \tag{23}$$

À partir de ceci, il est facile d'extraire un  $y$  tel qu'on le souhaitait (en prenant un vecteur propre associé à une valeur propre négative).

**Définition 4.**  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  est un cône si pour tout  $x$  de  $S$  et tout  $\lambda$  réel positif,  $\lambda x \in S$ .

**Proposition 5.** L'ensemble des matrices SDP est un cône convexe.

*Preuve.* Nous avons déjà vu la convexité. Soient  $M$  une matrice SDP et  $\lambda \geq 0$ , alors  $x^t(\lambda M)x = \lambda(x^t M x) \geq 0$ .  $\square$

### 1.3 La méthode des ellipsoïdes

Cette méthode fut mise au point pour résoudre des problèmes d'optimisations de fonctions convexes sur  $\mathbb{R}^n$  pendant les années 1970, puis seulement ensuite appliquée au problème de la programmation linéaire par Khachiyan en 1979 prouvant sa polynomialité.

La méthode des ellipsoïdes est un algorithme permettant de trouver des points dans un ensemble convexe. Comme au jeu de trouver un nombre entre 1 et 1000, il s'agit de couper l'espace de recherche en deux. Dans le jeu, à chaque étape, on diminue de moitié la taille du domaine, et en plus on cherche un entier, ce qui garantit la terminaison du jeu. Maintenant si on essaie d'y jouer dans  $\mathbb{R}^n$ , se pose le problème de l'arrêt puisque la solution désirée est réelle, et en plus on ne réduit pas le domaine de recherche de moitié.

En dimension 2, c'est le problème de chercher un lion dans le Sahara. On clôture le Sahara, puis on fait passer une clôture à travers le Sahara. L'une des parties contient un lion, s'il y a un lion dans le Sahara, on retire l'autre partie du Sahara. À force de diviser en deux, on obtient un domaine suffisamment petit pour faire une recherche exhaustive. Ce que montre cet exemple, c'est qu'il y a peut-être un volume minimum à exiger. Cela demande d'exiger une garantie de volume sur notre convexe, s'il est non-vide.

Nous avons donc besoin des trois points suivants : il faut pouvoir entourer le Sahara, borner la taille du lion et surtout pouvoir assurer la décroissance de la taille du domaine de recherche. La méthode des ellipsoïdes résout le problème ci-dessous.

**Entrées :**

- Un convexe  $K$  éventuellement vide,
- $R > 0$  tel que  $K$  est contenu dans la boule unité de rayon  $R$ ,
- un nombre  $\alpha$  tel que si  $K$  est non-vide, son volume est au moins  $\alpha$ .

**Sorties :**

- "Vide" si  $K$  est vide,



- un point de  $K$  sinon.

Quelle description choisit-on pour le convexe  $K$  ? On verra par la suite.

**Définition 6.** *Un ellipsoïde est l'image par une application affine inversible de la boule unité.*

Une application affine inversible est la composée d'une translation et d'une application linéaire inversible.

$$E := \{x + t : Px \in B(0, 1)\}$$

Or,

$$Px \in B(0, 1) \Leftrightarrow (Px)^t(Px) \leq 1 \quad (24)$$

$$\Leftrightarrow x^t M x \text{ pour } M = P^t P \quad (25)$$

et  $M$  est SDP. Un ellipsoïde  $E$  peut être décrit au choix par :

- $t$  vecteur de translation et  $P$  matrice d'une application linéaire inversible,
- $t$  vecteur de translation et  $M$  matrice SDP inversible, *i.e.* définie positive. En général, on lui préfère  $A = M^{-1}$ , qui est aussi définie positive. Dans ce cas,  $\text{Vol}(E) = C_n \sqrt{\det A}$  où  $C_n$  est le volume de la boule unité dans l'espace de dimension  $n$ .

### Description de la méthode

1.  $y_0 \leftarrow 0$ ,  $i \leftarrow 0$ ,  $E_0 = B(O, R)$ .
2. Est-ce que  $y_i$  appartient à  $K$  ?
3. Si oui, on s'arrête avec  $y = y_i$ .
4. Si non, on nous fournit un hyperplan séparant  $y_i$  de  $K$ . Il existe un nombre  $b$  et un vecteur  $a \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$\begin{cases} ay_i < b \\ \forall x \in K, ax \geq b \end{cases}$$

5. Calculer un ellipsoïde  $E_{i+1}$  contenant l'intersection de  $E_i$  avec l'hyper-espace  $\{x : Ax \leq b\}$ , de centre  $y_{i+1}$
6. Itérer :  $i \leftarrow i + 1$ , retourner en (2).

La décroissance (qu'on espère suffisamment rapide) des volumes des ellipsoïdes, liée avec la borne donnée sur le volume du convexe s'il est non-vide,

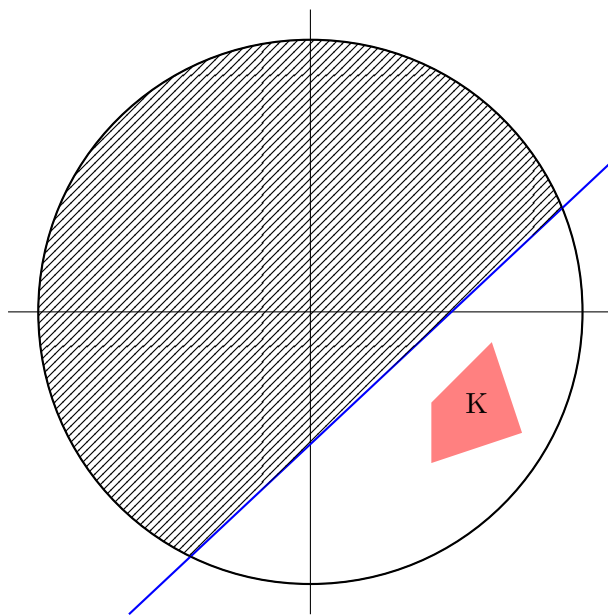


FIG. 5 – *La première étape de la méthode des ellipsoïdes, l'oracle retourne par exemple un hyperplan séparateur, ici en bleu. Il faut ensuite trouver un ellipsoïde contenant la région blanche, de volume minimum.*

permettra d'assurer la terminaison de l'algorithme.

Comment trouver un ellipsoïde de volume minimum contenant une section d'ellipsoïde ? On va seulement chercher pour une *section centrale*, *i.e.* une section par un hyperplan passant par le centre (parallèle à l'hyperplan donné), car en pratique, faire plus précis n'apporterait rien. Le nouvel ellipsoïde sera donc l'ellipsoïde de volume minimum contenant un demi-ellipsoïde contenant  $K$ , donné par l'intersection de l'ellipsoïde originel avec  $\{x : ax \leq ac\}$ ,  $a$  et  $b$  déterminant l'hyperplan séparateur séparant  $c$  de  $K$ . On commence à en savoir plus sur la façon dont  $K$  est décrit. Pour  $K$  un polyèdre donné par une liste d'inégalités, il suffit donc de tester chacune des inégalités définissant le polyèdre. Si l'une de ces inégalités est violée, cela nous donne un hyperplan séparateur. Mais cette méthode n'exige pas un convexe polyédral, mais plus généralement un convexe borné quelconque (la convexité, on l'a vu, est ce qui permet de séparer par des hyperplans). Puisque tout ce qu'on utilise est la séparation, on attend seulement comme description de  $K$  un oracle permettant de séparer  $K$  (répondant oui si le point donné est dans  $K$ , un hyperplan séparateur sinon).

Au niveau algorithmique, des problèmes peuvent survenir de l'utilisation des oracles. On peut donner des réels sous forme d'oracle : un tel oracle donne en fonction d'une précision donnée un rationnel approchant le réel qu'il représente avec la précision demandée. Mais il n'est pas possible alors de décider si le réel est nul ou pas (pour cet oracle). Ce qui ne préjuge de rien pour d'autres oracles !

Rappelons qu'un ellipsoïde est donné par son centre et une matrice définie positive (donnant la forme de l'ellipsoïde). Autrement dit, par le centre, les directions des axes et les longueurs des axes. À changement de base près, il suffit de résoudre notre problème, qui est de trouver un ellipsoïde de volume minimum contenant une section centrale d'ellipsoïde, dans le cas de la boule unité (et d'une section centrale de la boule). Puisqu'il s'agit d'une boule, n'importe quelle section convient à rotation près, considérons qu'il s'agit de la coupe  $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$ .

Équation de l'ellipsoïde de centre  $c$ , de vecteur de demi-axes  $(d_i)_i$ , dont les axes sont parallèles au repère :

$$\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - c_i)^2}{d_i} \leq 1 \quad (26)$$

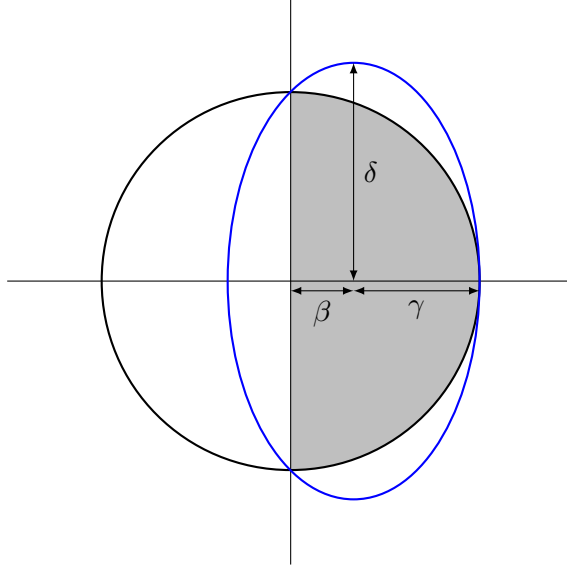


FIG. 6 – L'ellipsoïde de volume minimal que l'on cherche est en bleu.

Ceci nous donne :

$$\beta + \gamma = 1 \quad \text{pour le point } A \quad (27)$$

$$\frac{(0 - \beta)^2}{\delta^2} + \frac{(1 - 0)^2}{\delta^2} = \frac{\beta^2}{\gamma^2} + \frac{1}{\delta^2} = 1 \quad \text{pour le point } B \quad (28)$$

$$\text{Vol}(E') = C_n \gamma \delta^{n-1} \quad \text{qu'il faut minimiser} \quad (29)$$

On exprime  $\delta$  en fonction de  $\gamma$ .

$$-\frac{(1 - \gamma)^2}{\gamma^2} + 1 = \frac{1}{\delta^2} \Rightarrow \delta^2 = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - (1 - \gamma)^2} \quad (30)$$

En simplifiant,  $\delta = \gamma / \sqrt{2\gamma - 1}$ . On dérive alors la formule du volume et on

cherche les racines :

$$(C_n \gamma \delta^{n-1})' = \left( \frac{\gamma^n}{(1-2\gamma)^{\frac{n-1}{2}}} \right)' \quad (31)$$

$$= \gamma^{n-1} (1-2\gamma)^{\frac{n-3}{2}} \frac{n(1-2\gamma) - \frac{n-1}{2}(-2)\gamma}{(1-2\gamma)^{n-1}} \quad (32)$$

$$= \frac{\gamma^{n-1} (1-2\gamma)^{\frac{n-3}{2}}}{(1-2\gamma)^{n-1}} (\gamma(-2n + (n-1)) + n) \quad (33)$$

$$= \frac{\gamma^{n-1} (1-2\gamma)^{\frac{n-3}{2}}}{(1-2\gamma)^{n-1}} (n - (1+n)\gamma) \quad (34)$$

L'optimum est donc en  $\gamma = n/(n+1)$ . On obtient donc :

$$\begin{cases} \delta = \frac{1}{\sqrt{1-n^{-2}}} \\ \beta = \frac{1}{n+1} \\ \delta = \frac{n}{n+1} \end{cases} \quad (35)$$

Si  $E$  est de centre  $a$  et sa matrice définie positive est  $A$ , l'ellipsoïde de volume minimum contenant la section centrale  $\{x : c^t x \leq c^t a\}$  est l'ellipsoïde de centre  $a'$  et de matrice  $A'$  avec :

$$a' = a - \frac{1}{n+1} b \quad (36)$$

$$A' = \frac{n^2}{n^2-1} \left( A - \frac{2}{n+1} b b^t \right) \quad (37)$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{c^t A c}} A c \quad (38)$$

Est-on sûr que les volumes décroissent suffisamment ? C'est nécessaire pour démontrer la polynomialité de la méthode.

$$\frac{\text{Vol}(E')}{\text{Vol}(E)} = \frac{C_n \gamma \delta^{n-1}}{C_n} = \gamma \delta^{n-1} \quad (39)$$

$$= \sqrt{\left( \frac{n}{n+1} \right)^2 \frac{n^{2(n-1)}}{(n^2-1)^{n-1}}} \quad (40)$$

$$= \sqrt{\left( \frac{n}{n+1} \right)^{n+1} \left( \frac{n}{n-1} \right)^{n-1}} \quad (41)$$

On peut montrer que cette quantité est toujours inférieure à  $e^{-1/2n} < 1$ . Notons que tous les calculs intermédiaires se font en temps polynomial, à

ceci près qu'ils font appels à des calculs de racines carrées, qui posent des problèmes de calculs réels, on n'a donc pas encore d'implémentation de la méthode. Grötschel, Lovász et Schrijver prennent un ellipsoïde un tout petit peu plus grand pour contourner cette difficulté pratique, et font l'effort d'à nouveau borner le rapport de volume par une constante strictement inférieure à 1.

Nous n'avons pas encore dit comment optimiser sur le polyèdre. Il suffit d'ajouter des contraintes de niveau, en ajoutant une contrainte au polyèdre et en testant si le polyèdre obtenu est vide. Par dichotomie, on peut approximer la valeur optimale du programme.

Pour le choix de  $R$ , on peut inscrire les sommets du polyèdre dans la boule : les sommets sont des solutions d'un système d'équations linéaires issu d'inéquations du polyèdre. Par la formule de Cramer, on peut en déduire une borne sur les sommets. De même le volume dépend directement de la taille des coefficients des inéquations linéaires, ce n'est donc pas un problème. Un point très gênant par contre est que le polyèdre peut ne pas être pleinement dimensionnel. On le contourne en perturbant les seconds membres (dans le sens de l'augmentation). On peut alors montrer que le polyèdre qu'on regarde est non-vide si et seulement si le nouveau polyèdre a au moins un certain volume  $\epsilon$ .

Cet aperçu de la méthode ne rentre pas dans certains détails : les plus importants parmi ceux éludés ici sont les constantes  $(R, \epsilon)$ , desquelles dépend le nombre d'itérations, dont on doit bien sûr s'assurer qu'il est polynomial. Ces nombres dépendent d'une borne supposée connue sur la forme du codage des inégalités retournées par l'oracle. C'est donc un paramètre important, et un exposé détaillé de la méthode des ellipsoïdes ne peut en faire l'économie. Pour ces détails et tous les autres, voir les livres de Schrijver, et de Grötschel, Lovász et Schrijver.

## 2 Programmation sémi-définie

### 2.1 Cône convexe et programmation conique

On considère des cônes polyédraux (tous les cônes ne le sont pas en dimension supérieure à 2). Dans l'idée de la section précédente, ce que nous voulons est séparer ces cônes.

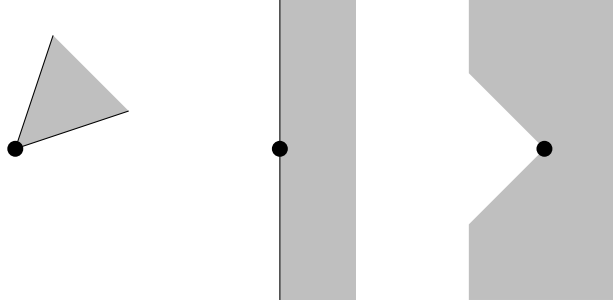


FIG. 7 – Cônes (en gris), les deux premiers sont convexes, pas le troisième

### Polaire d'un cône.

Si  $C$  est un cône, le polaire  $C^*$  de  $C$  est défini par :

$$C^* := \{y \in \mathbb{R}^n : \forall x \in C, x \cdot y \geq 0\}$$

*Exemple 4.* Dans  $\mathbb{R}^2$ , pour  $C = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}^+\}$ ,  $C^*$  est l'ensemble  $\{(x, y) : x \geq 0\}$ .

*Exemple 5.* Si  $C = \{(x, y) : x \geq 0\}$ , alors  $C^* = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}^+\}$

*Exemple 6.* Dans  $\mathbb{R}^2$  toujours,  $D = \{(u, u) : u \in \mathbb{R}^+\} \cup \{(u, -u) : u \in \mathbb{R}^+\}$

$$D^* = \{(s, t) : \forall u \in \mathbb{R}^+, su + tu \geq 0 \text{ et } su - tu \geq 0\} \quad (42)$$

Si  $(s, t) \in D^*$  alors on a les conditions suivantes :

$$\begin{cases} 2su \geq 0 \\ s \geq 0 \\ |t| \leq s \end{cases} \quad (43)$$

Donc  $D^* \subseteq \text{Conv}(D) = \{(s, t) : s \geq 0, |t| \leq s\}$ . Soit  $(s, t)$  dans ce convexe, on vérifie que  $(s, t)$  est dans le polaire :  $ut \leq us$  donc  $us - ut \geq 0$ , et  $-ut \leq us$  donc  $us + ut \geq 0$ . On a donc bien  $D^* = \text{Conv}(D)$ .

*Exercice 1.* Montrer que  $C^*$  est un cône convexe, même si  $C$  n'est pas un cône.

*Exercice 2.* Montrer que si  $C$  est un cône convexe, alors  $C^{**} = C$

*Exercice 3.* si  $E \subseteq F$ , alors  $F^* \subseteq E^*$ .

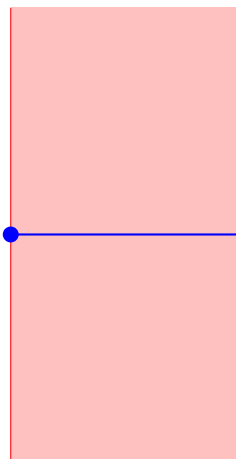


FIG. 8 – *Un cône en bleu, son polaire en rouge (exemple 5).*

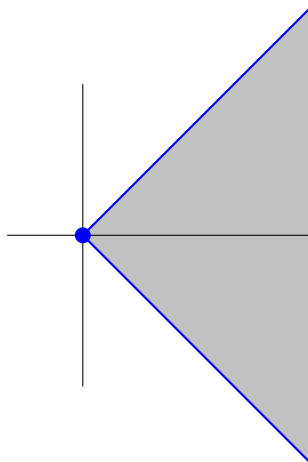


FIG. 9 –  *$D$  en bleu et  $D^*$  est la zone grisé (exemple 6).*



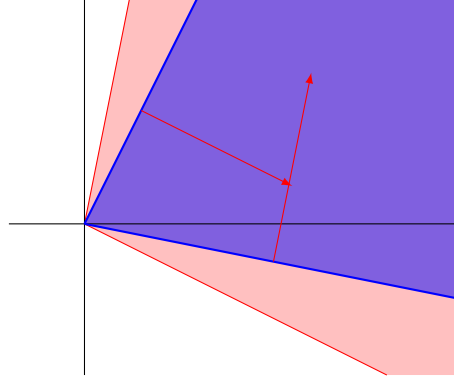


FIG. 10 – Le cône bleu défini par deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , son polaire en rouge (exemple 7).

*Exercice 4.* Si  $E$  et  $F$  sont des cônes convexes, alors  $(E + F)^* = E^* \cap F^*$  et  $(E \cup F)^* = E^* + F^*$

*Exemple 7.* Dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

$$E = \{\vec{x} : \vec{x} \cdot \vec{u} \geq 0 \text{ et } \vec{x} \cdot \vec{v} \geq 0\} \quad (44)$$

Alors, soit l'ensemble suivant

$$A = \{\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} : \lambda, \mu \geq 0\} \quad (45)$$

Comme  $A \subseteq E^*$  et  $E \subseteq A^*$  trivialement, on a par l'exercice 3  $A^* \subseteq E$  donc  $A^* = E$  puis par l'exercice 2,  $E^* = A^{**} = A$ .

Quand nous avons défini le cône  $E$ , nous avons hésité à le définir par des équations ou par des combinaisons de vecteurs. Il y a en fait une dualité entre les deux représentations, qui n'est pas sans rappeler la dualité des polyèdres, avec les représentations par enveloppe convexe de sommets ou avec des contraintes linéaires.

Finalement, dans l'exemple précédent, le bord du polaire est formé par les normales des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Le polaire est l'enveloppe convexe des vecteurs normaux aux vecteurs définissant les inégalités valides pour le cône, ce qui n'est finalement que la définition du polaire.

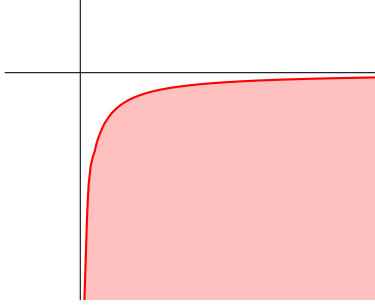


FIG. 11 – *Le programme mathématique (47) admet une borne supérieure mais pas de maximum.*

## 2.2 Programmation conique, linéaire, SDP

La programmation mathématique vise à répondre à des problèmes du type :

$$\begin{aligned} & \max_{x \in \mathbb{R}^n} f_0(x) \\ & \text{t.q.} \left\{ \begin{array}{l} f_1(x) \geq 0 \\ f_2(x) \geq 0 \\ \dots \\ f_m(x) \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (46)$$

domaine réalisable

Il n'existe pas toujours de solution, et le maximum doit parfois être compris comme un supréмум. Par exemple, dans l'exemple suivant, on peut s'approcher de la borne supérieure, sans l'atteindre.

$$\begin{aligned} & \max y \\ & \text{t.q.} \left\{ \begin{array}{l} x.y + 1 = 0 \\ x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (47)$$

La programmation linéaire, qui en est donc un cas particulier, possède de nombreuses propriétés agréables, en particulier la dualité et le fait que les solutions sont atteintes. En SDP, les solutions ne sont pas toujours atteintes (dans le sens de l'exemple précédent).

Un programme linéaire est un programme mathématique de la forme :

$$\max cx \quad \text{t.q.} \quad b - Ax \geq 0 \quad (48)$$

avec  $c$  vecteur ligne de taille  $n$ ,  $b$  vecteur colonne de taille  $m$ ,  $A$  matrice  $m \times n$ , et  $x$  un vecteur colonne de variables (inconnues), de taille  $n$ . Ici,  $0$  est le vecteur colonne de taille  $m$  dont chaque coordonnée est nulle, et la comparaison est terme-à-terme. On a donc bien écrit  $m$  inégalités scalaires.

Lorsque l'on écrit :

$$u \geq v \Leftrightarrow u - v \geq 0 \quad (49)$$

Que veut dire ce  $\geq 0$  ?

**Déf. 1 :**  $x \geq 0$  si  $x_i \geq 0$  pour tout  $i$ .

**Déf. 2 :**  $x \geq_K 0$  si  $x \in K$ ,  $K$  cône convexe fixé, dans cet exemple,  $K = \mathbb{R}_+^n$ .

Un programme linéaire écrit sous forme de programme convexe serait alors typiquement :

$$\max cx \quad \text{t.q.} \quad b - Ax \in K \quad (50)$$

Jusque là, il s'agit seulement d'un peu de réécriture.  $Ax + b$  est l'écriture la plus générale d'un vecteur à  $m$  composantes, où chaque composante est une fonction affine des  $x_i$ . On peut réécrire :

$$b - Ax = b - \sum_{j=1}^n x_j a_j^t \quad (51)$$

### Programmation conique.

Voici la forme du programme conique le plus général,  $x \in \mathbb{R}^n$  et on dispose d'un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^m$  :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} cx \quad (52)$$

$$\text{t.q.} \quad \sum_{i=1}^n x_i v_i - v_o \in K \quad (53)$$

où  $K$  est un cône de  $\mathbb{R}^n$ . Parallèlement, on donne le programme SDP le plus général :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} C \cdot x \quad (54)$$

$$\text{t.q.} \quad M_0 - \sum_{i=1}^n x_i M_i \in \mathcal{S}$$

Cette fois ci, l'espace vectoriel (pour la définition des contraintes) est celui des matrices carrées symétriques de taille  $m$ , et  $\mathcal{S}$  est le cône convexe des matrices SDP de taille  $m$ . Rappel :

$$\mathcal{S} = \{M \in \text{Sym}(m) : \forall x \in \mathbb{R}^m, x^t M x \geq 0\}$$

On notera  $M \succcurlyeq 0$  si  $M \in \mathcal{S}$ .

*Remarque 2.*  $\geq_K$  est un ordre partiel si  $K$  est un cône *pointé*, i.e.  $K \cap \overline{K} = \{0\}$ . On passe sur les détails, qui peuvent être vérifiés en exercice.

Le produit scalaire  $M \cdot N$  est la trace  $\text{tr}(M^t N)$ . Notons que :

$$M \cdot (x^t x) = \text{tr}(M x^t x) = \text{tr}(x^t M x) \geq 0 \quad \text{pour } M \succcurlyeq 0.$$

Donc  $\mathcal{S} = \{M \in \text{Sym}(m) : \forall N \succcurlyeq 0, M \cdot N \geq 0\}$ . Mais ceci n'est que la définition du polaire du cône des matrices SDP. Ce cône est donc autopolaire  $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}$ .

### Dualité pour les programmes coniques.

Soit  $y \in K^*$ . Nous savons que :

$$y \cdot (v_0 - \sum_{i=1}^n x_i v_i) \geq 0$$

Pour pouvoir donner une borne sur la solution, nous aimerions trouver quelque chose de la forme  $cx = \dots \leq \text{constante}$ . On cherche à réécrire :

$$cx = \sum_{i=1}^n c_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i (v_i \cdot y) \leq y \cdot v_0 \quad (55)$$

Si  $c_i = -v_i \cdot y$ , on a une borne. On écrit donc le programme suivant, pour obtenir la meilleure borne possible :

$$\begin{aligned} & \min y \cdot v_0 \\ & \text{t.q.} \quad \begin{cases} y \in K^* \\ v_i \cdot y = c_i \end{cases} \end{aligned} \quad (56)$$

C'est ceci qu'on appelle le programme dual du programme (52).

**Théoreme 7** (Dualité faible). *si  $x$  est une solution réalisable du programme (52), et  $y$  est une solution réalisable du programme (56), alors  $cx \leq y \cdot v_0$ .*

On applique ça à la SDP, le dual est alors :

$$\begin{aligned} \min Y \cdot M_0 \\ \text{t.q.} \quad \begin{cases} Y \in \mathcal{S} \\ M_i \cdot Y = c_i \end{cases} \end{aligned} \quad (57)$$

L'apport de la SDP par rapport à la programmation linéaire réside dans  $\mathcal{S}$ , qui contient des termes quadratiques, d'une forme particulière, mais qu'on rencontre souvent.

Pour résoudre un programme SDP avec la méthode des ellipsoïdes, il faut en particulier pouvoir séparer l'ensemble des solutions réalisables. Ici, il s'agit d'un sous-ensemble  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ , et  $D$  est définie par des contraintes sur des matrices symétriques. Comment sépare-t-on ? On s'appuie sur la diagonalisation ! Il existe un vecteur propre  $y$  associé à une valeur propre négative :

$$y^t(M_0 - \sum_{i=1}^m x_i M_i)y \quad (58)$$

$$(M_0 - \sum_{i=1}^m x_i M_i).yy^t < 0 \quad (59)$$

$$\sum_{i=1}^m x_i(-M_i.yy^t) < -M_0.yy^t \quad (60)$$

Et tous les éléments de  $D$  vérifie la dernière inégalité dans l'autre sens.

### 3 Max-Cut

Soit  $G = (V, E)$  un graphe non-orienté, et  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction de poids positive sur les arêtes. Une coupe est un sous-ensemble de sommets  $S \subseteq V$ . On note  $\delta(S)$  les arêtes de  $E$  comprenant exactement une extrémité dans  $S$ . Le poids  $w(\delta(S))$  d'une coupe  $S$  est alors :

$$w(\delta(S)) = \sum_{e \in \delta(S)} w(e)$$

Max-Cut.

**Entrée :** un graphe  $G = (V, E)$ ,  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

**Sortie :** (le poids d')une coupe de poids maximum de  $G$ .

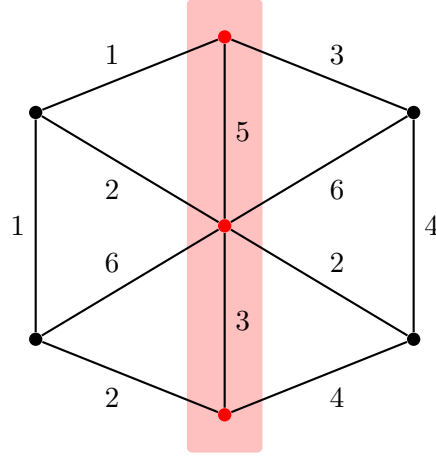


FIG. 12 – Un graphe pondéré avec 7 sommets, et une coupe de ce graphe de poids 26. Saurez-vous trouver une coupe de poids maximum ?

C'est un problème NP-complet. On peut cependant espérer trouver une coupe dont le poids est en relation (par exemple au moins la moitié) avec le poids maximum. Goemans et Williamson ont trouvé un algorithme d'approximation de rapport 0.87852. Ceci a été permis par l'écriture d'un programme SDP. Quel est le lien entre ce problème et la SDP ?

Voici une formulation de Max-CUT :

$$\begin{aligned} \max \sum_{ij \in E} w(ij) \frac{1 - v_i v_j}{2} \\ \text{t.q. } v_i \in \{-1, 1\}, \quad \forall n \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{aligned} \quad (\text{P})$$

Le programme de Goemans et Williamson est une relaxation de Max-CUT, permettant de trouver une borne supérieure légèrement supérieure au maximum. La contrainte (P) entraîne une non-convexité. On relâche alors ce programme en un programme dont le maximum est plus grand ou égal, ce qui nous donne une borne supérieure sur la solution de Max-CUT. Les  $v_i$  deviennent des vecteurs de la sphère de dimension  $n$ , et donc de norme 1 :

$$\begin{aligned} \max \sum_{ij \in E} w(ij) \frac{1 - v_i \cdot v_j}{2} \\ \text{t.q. } \|v_i\|_2 = 1, \quad \forall n \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{aligned} \quad (\text{R})$$

Le programme (R) peut être reformuler en un programme SDP. Posons  $X := (v_i \cdot v_j)$ . Alors  $\|v_i\|_2 = 1 \Leftrightarrow X_{ii} = 1$ . Si  $P := (v_1 \dots v_n)$ , alors

$X = P^t P$ , donc  $x^t X x = \|Px\|_2^2 \geq 0$ , donc  $X$  est SDP. Plus généralement, une matrice de produit scalaire est SDP, et la réciproque est vraie aussi : on obtient ce résultat en utilisant la diagonalisation :  $X = Q^t D Q$  avec  $D$  diagonale, et  $Q^t = Q^{-1}$ .  $D$  possède des valeurs propres positives, donc on peut prendre sa racine carrée  $E$  matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les racines carrées des éléments diagonaux de  $D$ . Alors  $X = Q^t E E Q = (EQ)^t (EQ)$ , donc  $X$  est une matrice de produit scalaire. (R) se réécrit ainsi :

$$\begin{aligned} \max K + \sum_{ij \in E} \frac{w_{ij}}{2} X_{ij} &= K + M_0 \cdot X \\ \text{t.q. } \begin{cases} X \cdot J_i = 1 \\ X \in \mathcal{S} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{S})$$

Pour une valeur bien choisie de  $M_0$ , et  $J_i$  est la matrice dont tous les coefficients sont 0 sauf l'élément d'indice  $i, i$  de valeur 1, et  $K = \sum_{i,j} \frac{w_{ij}}{2}$ .

Pour obtenir un algorithme d'approximation, on utilise un algorithme randomisé. Dans le programme (R), pour obtenir un maximum, on va vouloir minimiser le produit  $v_i \cdot v_j$ , donc écarter les vecteurs associés à des grands poids. De plus, ce sont seulement les positions relatives des vecteurs qui sont importants : l'objectif est invariant par rotation des vecteurs. Nous avons donc un certain nombre de vecteur dans la sphère, et on cherche une coupe maximum. Goemans et Williamson propose de tirer uniformément un hyperplan vectoriel au hasard (on tire son vecteur normal  $w$ ), et on prend pour coupe  $(\{i : v_i \cdot w \geq 0\}, \{i : v_i \cdot w < 0\})$ . Quel est l'espérance de la valeur  $C$  de cette coupe ?

$$E(C) = \sum_{ij \in E} w_{ij} \Pr(i \text{ et } j \text{ séparées par } C) \quad (61)$$

$$\Pr(i \text{ et } j \text{ séparées par } C) = \frac{|\theta|}{\pi} = \frac{\arccos v_i \cdot v_j}{\pi} \quad (62)$$

Pour tout  $y \in [-1, 1]$ , avec  $\alpha = \min_{\theta \in (0, \pi)} \frac{2\theta}{\pi(1 - \cos \theta)}$ , on a (cf. Figure 14) :

$$\frac{1}{\pi} \arccos y \geq \frac{\alpha}{2} (1 - y) \quad (63)$$

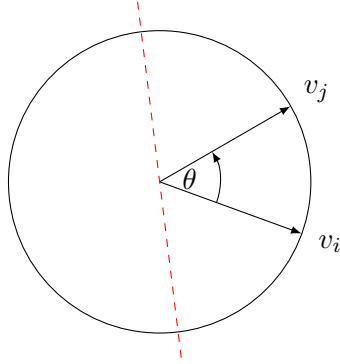


FIG. 13 – La probabilité que l'hyperplan sépare les deux vecteurs est directement lié à la longueur de l'arc défini par les deux vecteurs sur le cercle les contenant.

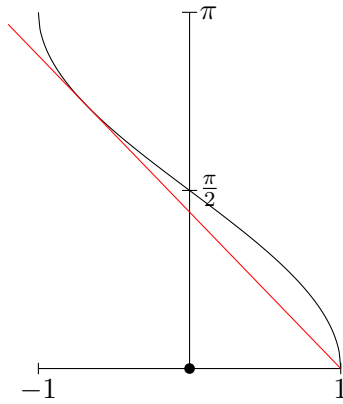


FIG. 14 – Une représentation de la fonction  $\arccos$ , qu'on minore par la droite rouge, de coefficient  $-\frac{\pi}{2}\alpha$ .



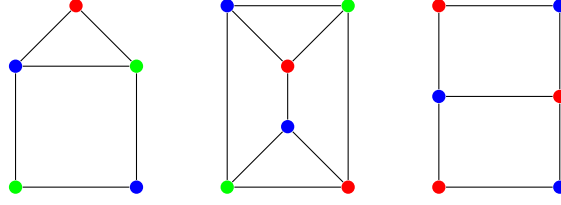


FIG. 15 – Quelques graphes et des colorations minimales pour ces graphes.

On applique cette approximation :

$$E(C) \geq \sum_{ij \in E} w_{ij} \frac{\alpha}{2} (1 - v_i \cdot v_j) \quad (64)$$

$$= \alpha \sum_{ij \in E} w_{ij} \frac{1 - v_i \cdot v_j}{2} \quad (65)$$

Soit  $Z_R$  l'optimum pour le programme (R), et  $Z_P$  le poids de la coupe maximum, on a alors :

$$E(C) \geq \alpha Z_R \geq \alpha Z_P \quad (66)$$

Comme  $\alpha > 0.87856$ , nous avons (presque) un algorithme d'approximation de ce ratio.

## 4 Coloration et graphes parfaits

### 4.1 Notions de base et aspects combinatoires

**Définition 8.** une coloration avec  $k$ -couleurs d'un graphe est une fonction  $\varphi : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  telle que pour toute arête  $ij$ ,  $\varphi(i) \neq \varphi(j)$ . Si  $G$  possède une coloration avec  $k$  couleurs,  $G$  est dit  $k$ -coloriable. Le nombre chromatique  $\chi(G)$  d'un graphe  $G$  est l'entier minimum  $k$  tel que  $G$  est  $k$ -coloriable.

Notons que si  $G$  n'est pas connexe, son nombre chromatique est la maximum de celui de ses composantes connexes.

**Définition 9.** Pour un graphe  $G$  et  $s \subseteq V(G)$ , le sous-graphe de  $G$  induit par  $S$ , noté  $G[S]$  est le graphe dont les sommets sont  $S$  et les arêtes  $E(G) \cap S^2$ .

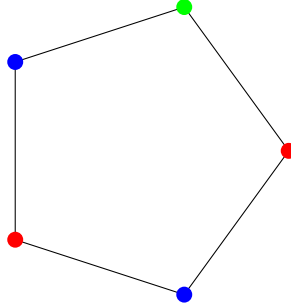


FIG. 16 – *Un graphe dont le nombre chromatique n'est pas égal à la taille de sa clique maximum*

**Définition 10.** *Si  $G$  est un graphe et  $U \subseteq V(G)$ , alors :*

- *$U$  est une clique si  $G[U]$  est complet,*
- *$U$  est un stable si  $E(G[U]) = \emptyset$*

**Définition 11.** *Le complémentaire d'un graphe  $G$  est le graphe  $(V(G), \{e \in V(G)^2 : e \notin E(G)\})$ .*

La taille d'une clique d'un graphe donne une borne inférieure sur l'indice chromatique de ce graphe. Plus généralement, pour tout sous-graphe induit, puisque la propriété de coloration est locale :

**Proposition 12.** *Pour tout  $U \subset V(G)$ ,  $\chi(G) \geq \chi(G[U])$ .*

**Corollaire 13.** *Si  $G$  a une clique de taille  $k$ , alors  $\chi(G) \geq k$ .*

On note donc  $\omega(G)$  la taille de la plus grande clique du graphe  $G$ . Malheureusement, calculer  $\chi$  et  $\omega$  sont deux problèmes NP-complets. Notons que la coloration est un problème ayant un intérêt industriel : pensons à la cuisson dans un grand four d'objets, dont les durées de cuissons ne sont pas toujours compatibles : une coloration du graphe des incompatibilités permet de trouver une répartition des objets permettant de tous les cuire en un nombre minimum de fournée.

Une des premières questions posées, par Berge, est de se demander pour quels graphes  $\chi$  et  $\omega$  sont égaux, permettant de certifier la minimalité d'une coloration par une clique, et la maximalité d'une clique par une coloration.

**Définition 14.** Un graphe  $G$  est dit biparti s'il existe une bipartition  $V_1, V_2$  de  $V(G)$ , telle que toute arête de  $G$  a une extrémité dans chaque partie.

**Théoreme 15.** Pour tout graphe biparti  $G$ ,  $\chi(G) = \omega(G)$ .

*Preuve.* Si  $G$  n'a pas d'arête, alors  $\chi(G) = 1$  et  $\omega(G) = 1$ . Si  $G$  a au moins une arête,  $\chi(G) \leq 2 \leq \omega(G) \leq \chi(G)$ .  $\square$

**Définition 16.** On appelle graphe de comparabilité tout graphe obtenu à partir d'un ordre partiel  $(V, \leq)$  avec  $V$  fini, par  $V(G) = V$  et  $E(G) = \{xy \in \binom{V}{2} : x \leq y \vee y \leq x\}$ .

**Théoreme 17.** Si  $G$  est un graphe de comparabilité, alors  $\chi(G) = \omega(G)$ .

*Preuve.* Soit  $G'$  le graphe (de comparabilité) obtenu en enlevant les minimaux  $S$  de l'ordre partiel associé à  $G$ .  $S$  est un stable, on colorie optimalement  $G'$  et on attribue une nouvelle couleur à  $S$ . Par récurrence,  $G'$  contient une clique  $K$  de taille  $\chi(G')$ . Il existe un élément  $u$  de  $S$  plus petit que chaque élément de  $K$  (car  $K$  induit un ordre total, donc possède un élément minimum, qui n'est pas minimum pour  $G$ ),  $\{u\} \cup K$  est une clique de taille  $\chi(G') + 1$  et on a une coloration de même taille, donc  $\chi(G) = \omega(G)$ .  $\square$

**Définition 18.** Une graphe d'intervalle  $(I, E)$  est un graphe obtenu à partir d'une famille finie d'intervalles  $[\alpha_i, \beta_i]_{i \in I}$  par  $ij \in E \Leftrightarrow [\alpha_i, \beta_i] \cap [\alpha_j, \beta_j] \neq \emptyset$ .

**Théoreme 19.** Si  $G$  est un graphe d'intervalle, alors  $\chi(G) = \omega(G)$ .

*Preuve.* (esquisse). On trie les intervalles par ordre de fin croissante, puis on colorie de manière gloutonne.  $\square$

On va en fait montrer cette propriété sur des graphes plus généraux.

**Définition 20.** Un graphe  $G$  est dit parfait si pour tout sous-graphe induit  $H$  de  $G$ ,  $\chi(H) = \omega(H)$ .

Puisque les graphes bipartis, les graphes d'intervalles et les graphes de comparabilité sont fermés par induction, ce sont des graphes parfaits. En 1960, Berge formula deux conjectures sur la structure des graphes parfaits :

- conjecture “faible” : si  $G$  est parfait, son complémentaire est parfait.
- conjecture “forte” :  $G$  est parfait ssi il ne possède pas comme sous-graphe induit un cycle impair de longueur au moins 5 et leurs complémentaires.

Les deux conjectures ont été résolues, la première par Lovász dans les années 1970, la seconde par Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas en 2003.

**Théoreme 21** (Lovász). *Si  $G$  est parfait, alors  $\overline{G}$  est parfait.*

Nous notons  $H < G$  si  $H$  est un sous-graphe induit de  $G$ , et  $G - S = G[V \setminus S]$ . En particulier,  $G < G$ .

**Proposition 22.**  *$G$  est parfait ssi pour tout  $H < G$ , il existe une stable  $S$  de  $G$  tel que  $\omega(H - S) < \omega(H)$ .*

Ou de manière équivalente, pour tout  $H$  il existe un stable intersectant tout clique maximum.

*Preuve.* Si  $G$  est parfait, soit  $H < G$ . Il existe  $\varphi : V(H) \rightarrow \{1, \dots, \chi(H)\}$  coloration de  $G[H]$ , soit  $S$  une classe de couleur, par exemple  $\varphi^{-1}(1)$ . Alors  $S$  intersecte toutes les cliques de taille maximum puisque  $G[H \setminus S]$  est colorable en  $\chi(H) - 1$  couleurs, donc ne possède pas de cliques de taille  $\chi(H)$ . Donc  $\omega(H - S) < \omega(H)$ .

Réciproquement, soit  $H < G$ , montrons que  $\omega(H) < \chi(H)$ . D'après l'hypothèse, on peut retirer successivement des stables  $S_1, \dots, S_k$  de  $H$  jusqu'à épuisement des sommets, avec  $\omega(H) > \omega(H - S_1) > \dots > \omega(H - \bigcup_{i=1}^k S_i) = 0$ , donc  $k \leq \omega(H)$ , et  $S_1, \dots, S_k$  est une coloration de  $H$ . Donc  $\chi(H) \leq k \leq \omega(H) \leq \chi(H)$ , d'où l'égalité.  $\square$

**Lemme 23** (de remplacement). *Soit  $G$  un graphe parfait et  $H$  le graphe obtenu en remplaçant certains sommets de  $G$  par des cliques, alors  $H$  est parfait.*

En fait, cela reste vrai si on remplace des sommets par des graphes parfaits, mais nous ne nous intéressons qu'à cette version simple.

*Preuve.* Il suffit de le montrer pour un seul sommet. Soit  $H$  obtenu en remplaçant  $v$  sommet de  $G$  par une clique de taille  $k$ . On montre que  $\chi(H) = \omega(H)$ , la preuve pour les sous-graphes induits étant similaire.

Comme  $G$  est parfait, pour une coloration de  $G$ , on choisit  $S$  le stable contenant  $v$ . Soit  $S' = S \setminus \{v\} \cup \{v_1\}$ . Soit  $K$  une clique maximum de  $H$ . Si  $K$  est disjoint des nouveaux sommets de  $H$ , alors  $K$  est une clique maximum de  $G$ , donc elle intersecte  $S'$ . Sinon,  $K$  doit contenir tous les nouveaux sommets, donc  $v$ , et intersecte donc  $S'$ .  $\square$

On note  $\alpha(G)$  la cardinalité maximum d'un stable de  $G$ .

*Preuve.* (théorème 21) Par la contraposée, soit  $G$  tel que  $\overline{G}$  ne soit pas parfait. Alors il existe  $H < \overline{G}$  tel que pour tout stable de  $H$ ,  $\omega(H - S) = \omega(H)$ . Sans perte de généralité, on peut prendre  $H = \overline{G}$ .

Soit  $(H_i)_{i \in [1, r]}$  une liste des cliques de  $G$ . Alors pour chaque clique  $H_i$ ,

puisque  $\omega(\overline{G} - H_i) = \omega(\overline{G})$ , il existe un stable de cardinalité maximum  $A_i$  dans  $G$  pour chaque  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  avec  $A_i \cap H_i = \emptyset$ , et  $|A_i| = \alpha(G)$ . Pour  $v \in V$ , on définit  $w(v)$  le nombre de stables  $A_i$  contenant  $v$ . Soit  $G'$  le graphe obtenu en remplaçant dans  $G$  chaque  $v$  par une clique de taille  $w(v)$ . On calcule  $\omega(G')$  : il existe  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  tel que

$$\omega(G') = \sum_{v \in H_i} w(v) \quad (67)$$

$$= \sum_{j=1}^r |H_i \cap A_j| \quad (68)$$

$$\leq r - 1 \quad \text{car } H_i \cap A_i = \emptyset \quad (69)$$

Maintenant, on calcule  $\chi(G')$  :

$$\chi(G') \geq \frac{|V(G')|}{\alpha(G')} \quad (70)$$

$$= \frac{\sum_{v \in V} w(v)}{\alpha(G)} \quad (71)$$

$$= \frac{r\alpha(G)}{\alpha(G)} = r \quad (72)$$

Donc  $G'$  n'est pas parfait. Par le lemme de remplacement,  $G$  non plus.  $\square$

Ce théorème généralise plusieurs résultats d'optimisation combinatoire, comme la perfection des complémentaires de graphes bipartis ou le théorème de Dilworth.

**Corollaire 24** (Dilworth). *Le nombre minimum de chaînes pour couvrir un ordre partiel est égal à la taille de la plus grande antichaîne de cet ordre.*

**Corollaire 25** (König). *Les complémentaires des graphes bipartis sont parfaits (autrement dit :  $|V| - \nu(G) = \alpha(G)$ ).*

## 5 Coupes matricielles de Lovász et Schrijver

(ou méthode “lift & project”, début des années 1990, ajouter référence.)

### Études des stables d'un graphe.

Pour  $S$  stable, on peut étudier son vecteur caractéristique  $x = \chi_S$  pour se ramener à un problème géométrique. On se limitera aux vecteurs de  $\mathbb{R}_+^n$ . On cherche donc des inégalités valides pour les stables, par exemple :

$$x_i + x_j \leq 1 \quad (\text{pour } ij \in E) \quad (73)$$

On définit alors  $\text{FRAC}(G) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : \forall ij \in E, x_i + x_j \leq 1\}$ . Alors pour tout graphe sans sommet isolé, on a trivialement :

**Proposition 26.**  $\text{FRAC}(G) \cap \mathbb{N}^n = \mathcal{S}(G)$  avec  $\mathcal{S}(G)$  l'ensemble des vecteurs caractéristiques des stables de  $G$ .

Notons  $\text{STAB}(G) = \text{conv}(\mathcal{S}(G))$ , alors :

**Théoreme 27.**  $\text{FRAC}(G) = \text{STAB}(G)$  ssi  $G$  est biparti.

*Preuve.* Si  $G$  a un cycle impair  $C = (v_1, v_2, \dots, v_{2k+1})$ , alors soit  $x = (1/2)\chi_C$  le vecteur avec  $x_v = \frac{1}{2}$  si  $v \in C$ ,  $x_v = 0$  sinon. Alors  $x \in \text{FRAC}(G)$ . Supposons que  $x \in \text{STAB}(G)$ , alors  $x$  est une combinaison convexe de vecteurs caractéristiques de stables,  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i \chi_{S_i}$ , pour  $S_1, \dots, S_k$  stables ( $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  et  $\lambda_i \geq 0$ ). Or :

$$1 \cdot x = \frac{2k+1}{2} = k + \frac{1}{2} \quad (74)$$

$$= \sum_i \lambda_i \chi_{S_i} \quad (75)$$

$$= \sum_i \lambda_i |S_i| \quad (76)$$

$$\leq \sum_i \lambda_i k = k \quad (77)$$

Contradiction.

Si  $G$  est biparti, on sait déjà que  $\text{STAB}(G) \subseteq \text{FRAC}(G)$ . On montre que les points extrêmes de  $\text{FRAC}(G)$  sont dans  $\text{STAB}(G)$ , soit  $x$  un de ces points extrêmes. Soit  $E'$  l'ensemble des arêtes  $ij$  avec  $x_i + x_j = 1$ . Soit un sommet  $v$  avec  $0 < x_v < 1$ , alors soit  $V_1, V_2$  la bipartition de la composante connexe de  $(V, E')$  contenant  $v$ . Alors  $x + \epsilon(\chi_{V_1} - \chi_{V_2})$  reste un vecteur de  $\text{FRAC}(G)$  pour  $\epsilon$  dans le voisinage de 0 (plus exactement, pour  $|\epsilon| \leq \min\{x_v, 1 - x_v, \min\{1 - x_i - x_j : x_i + x_j < 1, ij \in E'\}\}$ ). Donc  $x$  n'est pas un point extrême, contradiction. Donc  $x$  est un vecteur entier, donc le vecteur caractéristique d'un stable.  $\square$

Il existe d'autres classes d'inégalités. Par exemple :

$$\sum_{v \in K} x_v \leq 1 \quad \text{pour } K \text{ clique de } G \quad (78)$$

On note  $\text{QSTAB}(G) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : \text{pour toute clique } K, \sum_{v \in K} x_v \leq 1\}$ .

**Proposition 28.**  $\text{STAB}(G) \subseteq \text{QSTAB}(G) \subseteq \text{FRAC}(G)$ .

*Preuve.* La deuxième inclusion vient du fait qu'une arête est une clique de taille 2. La première suit du fait qu'un stable intersecte toute clique en au plus un sommet.  $\square$

## Coupes de Lovász et Schrijver.

On s'intéresse maintenant à trouver des opérateurs qui rajoute des contraintes valides pour les points entiers d'un polyèdre, à la façon des coupes de Chvatal-Gomory.

Voyons ce que nous pouvons faire pour le problème du stable, à partir de FRAC, pour  $C_5$  le cycle de longueur 5.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_4 + x_5 \leq 1 \\ x_5 + x_1 \leq 1 \end{array} \right\} \text{FRAC}(G) \quad (79)$$

En sommant les 5 inégalités, on obtient :

$$\sum_{i=1}^5 x_i \leq \frac{5}{2} \quad (80)$$

Chvatal-Gomory nous donne justement que pour les solutions entières, la somme des  $x_i$  va être entière, donc doit être inférieure ou égale à 2, ce qui nous donne une nouvelle inégalité :

$$\sum_{i=1}^5 x_i \leq 2 \quad (81)$$

Soit une roue impaire, c'est-à-dire un cycle  $(x_1, x_2, \dots, x_{2k+1})$  avec un sommet supplémentaire  $x_0$  adjacent à tous les sommets du cycle. Avec Chvatal-Gomory, on ajoute :

$$\sum_{i=1}^{2k+1} x_i \leq k \quad (82)$$

Ce n'est en fait pas suffisant pour décrire l'enveloppe des points entiers. On essaie de prendre en compte  $x_0$  dans l'inéquation, sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{2k+1} x_i + \alpha x_0 \leq 3 \quad (83)$$

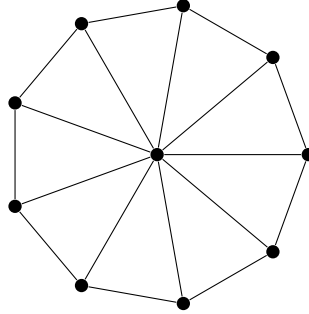


FIG. 17 – Une roue impaire.

On peut prendre  $\alpha = 3$ .

De manière plus générale, on cherche à générer des contraintes supplémentaires à un programme linéaire, pour obtenir de meilleures relaxations d'un programme linéaire en nombre entier. On appelle ces contraintes des *coupes*. La méthode de Lovász et Schrijver permet de générer automatiquement des coupes pour des programmes entiers 0-1 seulement. Le but est d'obtenir un optimum relaxé plus proche de l'optimum entier (éventuellement égal, bien que si  $P \neq NP$ , on ne puisse espérer y arriver systématiquement).

*Exemple 8.* Sur  $STAB(G)$  : on part de  $FRAC(G) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i + x_j \leq 1 \forall i, j \in E, x \geq 0\}$ . La méthode permet d'enrichir cette description, *i.e.* de générer à partir de  $FRAC(G)$  des inégalités valides pour  $STAB(G)$  (enveloppe convexe des points entiers de  $FRAC(G)$ , et qui grignotent un peu le domaine de  $FRAC(G)$ ).

**1<sup>ière</sup> constatation :** si  $x_i \in \{0, 1\}$ , alors  $x_i = x_i^2$ .

**2<sup>ième</sup> constatation :** si  $c \cdot x \geq 0$  et  $d \cdot x \geq 0$ , alors  $(c \cdot x)(d \cdot x) \geq 0$ .

**3<sup>ième</sup> constatation :** si dans une combinaison convexe de la forme  $\sum_i \lambda_i (c_i \cdot x)(d_i \cdot x) \geq 0$ , on arrive à faire disparaître les termes quadratiques, on obtient une inégalité valide pour les points entiers des polyèdres dont les  $c_i \cdot x \geq 0$  et  $d_i \cdot x \geq 0$  sont des inégalités valides pour l'enveloppe des points entiers. Pour obtenir des termes non-quadratiques, on utilise la première constatation, et c'est pour ça que l'inégalité est valide pour les points entiers.

*Exemple 9.* Comment obtenir les inégalités de triangles pour le problème du stable :  $x_i + x_j + x_k \leq 1$  pour un triangle  $ijk$  ?

On a :  $x_i \geq 0$  et  $x_i + x_j \leq 1$ , d'où  $x_i(1 - x_i - x_j) \geq 0$ , en développant, si



$x_i \in \{0, 1\}$ , on obtient :

$$x_i - x_i^2 - x_i x_j \geq 0 \Rightarrow x_i x_j \leq 0 \quad (84)$$

Et de même,  $x_i x_k \leq 0$  et  $x_j x_k \leq 0$ . Avec les inégalités  $x_j + x_k \leq 1$  et  $x_i \leq 1$ , on obtient :

$$1 - x_i - x_j - x_k + x_i x_j + x_i x_k \geq 0 \quad (85)$$

$$\Rightarrow 1 - x_i - x_j - x_k \geq 0 \quad (86)$$

En fait, pour des raisons notamment algorithmique, on se restreindra aux produits d'inéquations entre une inégalité de borne et une autre inégalité. Autoriser plus de produits ne donnerait pas de théorèmes plus puissants que ceux qu'on va avoir avec cette restriction, mais engendrerait une mauvaise complexité algorithmique.

## Présentation plus formelle.

Pour insister sur l'aspect symbolique, on écrit les variables  $X_i$  (et non plus  $x_i$ ). Le terme constant  $b$  d'une inégalité sera représenté par  $b.X_0$ . Le produit de variables sera noté  $X_i \otimes X_j$ . *A priori*,  $X_i \otimes X_j \neq X_j \otimes X_i$ . On étend ce produit aux combinaisons de variables :

$$\begin{aligned} (3X_0 - X_1 + X_2) \otimes (X_0 + 2X_2) = & 3X_0 \otimes X_0 + 6X_0 \otimes X_2 - X_1 \otimes X_0 \\ & - 2X_1 \otimes X_2 + X_2 \otimes X_0 + 2X_2 \otimes X_2 \end{aligned}$$

*Exemple 10.* Pour l'inégalité des triangles du problème du stable ( $X_i + X_j + X_k \leq X_0$ ) :

$$\begin{aligned} (X_0 - X_i) \otimes (X_0 - X_j - X_k) & \geq 0 \\ \Rightarrow X_0 \otimes X_0 - X_i \otimes X_0 - X_0 \otimes X_j - X_i \otimes X_0 & + X_i \otimes X_j + X_i \otimes X_k \geq 0 \end{aligned}$$

Et par ailleurs :

$$\begin{aligned} X_i \otimes (X_0 - X_i - X_j) & \geq 0 \Rightarrow X_i \otimes X_0 - X_i \otimes X_i - X_i \otimes X_j \geq 0 \\ X_i \otimes (X_0 - X_i - X_k) & \geq 0 \Rightarrow X_i \otimes X_0 - X_i \otimes X_i - X_i \otimes X_k \geq 0 \end{aligned}$$

En sommant tout cela :

$$X_0 \otimes X_0 - X_i \otimes X_0 - X_0 \otimes X_j - X_0 \otimes X_k + 2(X_i \otimes X_0 - X_i \otimes X_i) \geq 0$$

On impose :

- (i)  $X_i \otimes X_0 = X_0 \otimes X_i$
- (ii)  $X_i \otimes X_i = X_i \otimes X_0$

### Description de l'opérateur $N$ .

Pour décrire  $N(P)$  (effet de l'opérateur sur le polyèdre  $P$ ), on décrit  $N(K)$  (effet de l'opérateur sur un cône de l'espace homogénéisé). Soit  $K$  un cône convexe obtenu par homogénéisation d'un polyèdre  $P$  (exemple :  $K$  obtenu à partir de  $\text{FRAC}(G)$ , avec  $K = \{x \geq 0 : \forall ij \in E, x_i + x_j \leq x_0, x_i \geq x_0\}$ ). On définit :

$$M_0(K) = \left\{ Y \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} : \begin{bmatrix} Y_{0,i} = Y_{i,i} = Y_{i,0}, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ Y_{\bullet,i} \in K, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ Y_{\bullet,0} - Y_{\bullet,i} \in K, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{bmatrix} \right\} \quad (87)$$

Notons que si on sait séparer  $K$ , on sait aussi séparer  $M_0(K)$ .

Soit  $C$  une inégalité valide pour  $K$  :

$$C : a_0 X_0 + a_1 X_1 + \dots a_n X_n \geq 0 \quad (88)$$

Le produit de  $C$  par  $X_i \geq 0$  est :

$$a_0 X_i \otimes X_0 + a_1 X_i \otimes X_1 + \dots a_n X_i \otimes X_n \geq 0 \quad (89)$$

En prenant  $X_i \otimes X_j = Y_{j,i}$ , " $Y_{\bullet,i}$  vérifie  $C$ " est équivalent à (89).

On définit ensuite :

$$N_0(K) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \exists Y \in M_0(K), \text{diag}(Y) = x\} \quad (90)$$

Les inégalités valides pour la projection d'un convexe sont les inégalités valides pour le convexe orthogonales à la direction de projection. Pour un polyèdre, on considère les combinaisons convexes de contraintes qui donne une contrainte orthogonale à la direction de la projection. Ici  $N_0(K)$  est une projection de  $M_0(K)$ , et les inégalités valides pour  $N_0(K)$  s'obtiennent donc comme des combinaisons des contraintes définissant  $M_0(K)$ , pour lesquels les termes "quadratiques" disparaissent, ce qui exactement ce que l'on cherchait. Maintenant en ajoutant la symétrie :

$$M(K) = \left\{ Y \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} : \begin{bmatrix} Y_{i,j} = Y_{j,i}, \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ Y_{0,i} = Y_{i,i}, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ Y_{\bullet,i} \in K, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ Y_{\bullet,0} - Y_{\bullet,i} \in K, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{bmatrix} \right\} \quad (91)$$

$$N(K) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \exists Y \in M(K), \text{diag}(Y) = x\} \quad (92)$$

Pour optimiser sur un projeté, il suffit d'optimiser sur l'objet qu'on projette par la même fonction, et projeté l'optimum.

**Théoreme 29.** *Si on sait séparer  $K$ , on sait séparer  $N(K)$ .*

*Preuve.* On sait séparer  $M(K)$  donc on peut optimiser sur  $N(K)$  via les ellipsoïdes. Or, optimiser sur  $N(K)$  revient à optimiser sur  $M(K)$ , donc on peut optimiser sur  $N(K)$ , donc séparer sur  $N(K)$ .  $\square$

**Théoreme 30.**  $K_I \subseteq N(K) \subseteq K$  où  $K_I$  est l'homogénéisé de l'enveloppe convexe des points entiers de  $P$ .

*Preuve.* On projette  $M(K)$  par la diagonale, *i.e.* par la première colonne. Or si  $Y \in M_0(K)$ ,  $Y_{\bullet,1} \in K$  et  $Y_{\bullet,0} - Y_{\bullet,1} \in K$ , or  $K$  est un cône, donc  $Y_{\bullet,0}$  est dans  $K$ . Donc  $N_0(K) \subseteq K$ .

Soit  $x \in P_I$ ,  $x' = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in K_I$ . Soit  $Y = x' \cdot x'^t$  ( $Y = Y^t$  pour faire la preuve avec  $N$ ).  $Y_{0,\bullet} = \text{diag}(Y)$  car  $1x_i = x_i^2$ . Si  $x_i = 0$  alors  $Y_{\bullet,i} = 0 \in K$  et  $Y_{\bullet,0} - Y_{\bullet,i} = x' - 0 = x' \in K$ . Si  $x_i = 1$  alors  $Y_{\bullet,i} = x' \in K$  et  $Y_{\bullet,0} - Y_{\bullet,i} = x' - x' + 0 \in K$ . Enfin,  $\text{diag}(Y) = x'$ , donc  $x' \in N_0(K)$ .  $\square$

**Définition 31.**

$$N^{i+1}(P) := N(N^i(P))$$

$$N^0(P) := P$$

La grande question est maintenant de savoir s'il existe  $k$  tel que  $N^k(P) = P_I$  pour un polyèdre  $P$  donné.

**Théoreme 32.**  $N^n(P) = P_I$ ,  $n$  étant la dimension de l'espace contenant  $P$ .

Par rapport aux coupes de Chv'atal et Gomory, on a deux avantages : la borne est connu, et la complexité du calcul des coupes de Lovász et Schrijver est raisonnable.

**Définition 33.**

$$G_i := \{x : x_i = 0\}$$

$$H_i := \{x : x_i = x_0\}$$

**Lemme 34.**

$$N_0(K) \subseteq (G_i \cap K) + (H_i \cap K) \quad (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket) \quad (93)$$

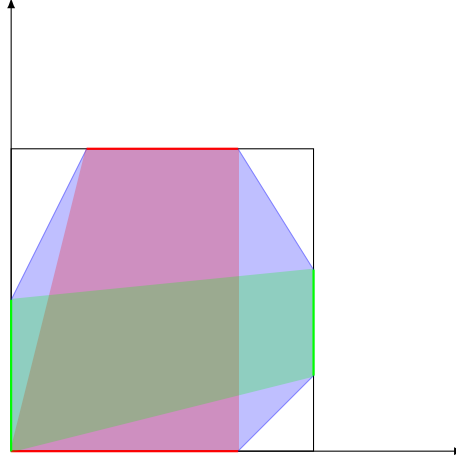


FIG. 18 – Construction de  $N_0(P)$  (intersection du vert et du violet) à partir de  $P$  (en bleu).

*Preuve.* Soit  $x \in N_0(K)$ . Alors il existe  $Y \in M_0(K)$  tel que  $x = \text{diag}(Y)$ . Soit  $y_i$  la  $i^{\text{ième}}$  colonne de  $Y$ . Alors  $y_i \in H_i$  car  $Y_{i,i} = Y_{0,i}$  et  $y_i \in K$  donc  $y_i \in H_i \cap K$ . De même,  $y_0 - y_i \in G_i$ ,  $y_0 - y_i \in K$  donc  $y_0 - y_i \in G_i \cap K$ . On a donc  $x = y_0 = y_i + (y_0 - y_i) \in (G_i \cap K) + (H_i \cap K)$ .  $\square$

La preuve du théorème est que  $N^k(P)$  est dans l'enveloppe convexe de points dont au moins  $k$  sont entiers.

## 6 La fonction $\theta$ de Lovász

**Définition 35.** une représentation orthonormale de  $G$  est un ensemble de vecteurs unitaires  $c, v_1, \dots, v_n$  ( $n = |V(G)|$ ) tels que  $v_i \cdot v_j = 0$  pour tout  $i$  et  $j$  distincts, avec  $ij \notin E$ .

**Définition 36.**

$$TH(G) := \left\{ x \geq 0 : \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n (c \cdot v_i)^2 x_i \leq 1 \\ \text{pour toute représentation orthonormale } c, v_1, \dots, v_n \text{ de } G \end{array} \right\}$$

$$\theta(G, w) := \max\{w \cdot x : x \in TH(G)\}$$

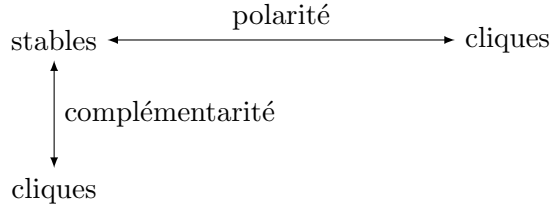
**Théoreme 37.**  $STAB(G) \subseteq TH(G) \subseteq QSTAB(G)$

*Preuve.* D'abord,  $\text{TH}(G) \subseteq \text{QSTAB}(G)$ . Si  $K$  est une clique de  $G$ , on définit :

$$v_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+|V(G)|-|K|} \text{ si } x \in K, \quad v_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sinon.}$$

Alors  $v_x \cdot v_y \neq 0$  implique  $x$  et  $y$  sont dans  $K$ , c'est bien une représentation orthonormale, la contrainte associée est  $\sum_{i=1}^n (c \cdot v_i)^2 x_i = \sum_{i \in K} x_i \leq 1$ . Deuxièmement, soit  $S$  un stable de  $G$  et  $(c, v_1, \dots, v_n)$  une représentation orthonormale de  $G$ . Alors  $\sum_{i=1}^n (c \cdot v_i)^2 x_i = \sum_{i \in S} (c \cdot v_i)^2$ . Or les  $v_i, i \in S$  sont orthogonaux deux-à-deux, on peut les compléter en une base orthonormale  $((v_i)_{i \in S}, w_1, \dots, w_k)$ , et donc,  $A = \|c\|^2 = \sum_{i \in S} (c \cdot v_i)^2 + \sum_{j=1}^k (c \cdot w_j)^2 \geq \sum_{i \in S} (c \cdot v_i)^2$ .  $\square$

**Théoreme 38.**  $\theta(G, w)$  peut s'écrire comme la solution d'un programme semi-défini, et peut donc être calculé en temps polynomial.

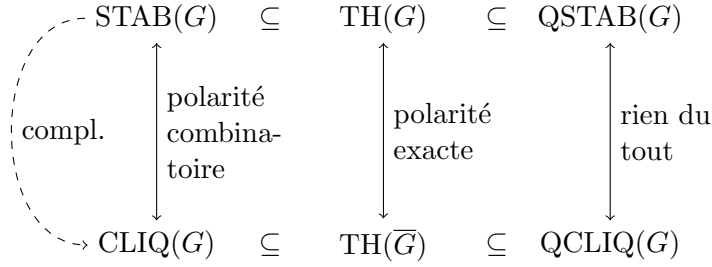


Si  $S$  est un stable de  $G$  et  $K$  est une clique de  $G$ , alors  $|S \cap K| \leq 1$ . C'est ceci qu'on appelle polarité dans le schéma ci-dessus.

Les stables sont les solutions optimales de :

$$\sum_{v \in K \text{ clique}} x_v \leq 1 \iff \sum_{K \text{ cliques}} x \cdot \chi_K \leq 1 \quad (94)$$

On a :



**Théoreme 39.**

$$\begin{aligned}
& STAB(G) = TH(G) \\
& \iff TH(G) = QSTAB(G) \\
& \iff TH(G) \text{ est un polyèdre} \\
& \iff G \text{ est parfait}
\end{aligned}$$

**Corollaire 40.** *Pour un graphe parfait, on peut calculer  $\omega$  et  $\chi$  en temps polynomial.*

## L'opérateur $N^+$

**Définition 41.**

$$\begin{aligned}
M^+(K) &:= \{Y \in M_0(K) : Y \succcurlyeq 0\} \\
N^+(K) &:= \{diag Y : Y \in M^+(K)\}
\end{aligned}$$

**Théoreme 42.**  $K_I \subseteq N^+(K)$

*Preuve.* Comme pour  $N_0$ , il suffit de remarquer qu'à un point entier  $x$  de  $P_I$ , on peut associer un  $Y$  de  $M_+(K)$  par  $Y = (1 \ x)(1 \ x)^t$ , alors  $Y \succcurlyeq 0$ .  $\square$

**Inégalités valides pour  $N^+$ .**

On veut dériver à partir de  $FRAC(G)$  les inégalités  $\sum_{i \in K} X_i \leq X_0$ . La nouvelle opération permise par  $N^+$  est pour tout  $a_0, \dots, a_n$  :

$$\left( \sum_{i=0}^n a_i X_i \right)^2 \geq 0 \tag{95}$$

Partons de :

$$(X_O - \sum_{i \in K} X_i)^2 \geq 0 \quad (96)$$

$$\Rightarrow X_0^2 + \sum_{i \in K} X_i^2 - 2X_0 \otimes (\sum_{i \in K} X_i) + 2 \sum_{i < j} X_i X_j \geq 0 \quad (97)$$

$$\Rightarrow X_0^2 + \sum_{i \in K} (1 - 2)X_0 \otimes X_i \geq 0 \quad (98)$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in K} X_0 \otimes X_i \leq X_0^2 \quad (99)$$

Un coup de  $N^+$  sur  $\text{FRAC}(G)$  produit donc les inégalités de cliques.